2018 年经济类联考综合能力数学真题

二、数学单项选择题：第 21～30 小题，本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

21. 设函数 $f(x)=\int_{x^2}^{0} x\cos t^2 \mathrm{d}t$，则 $f'(x)=$（　　）.

A. $-2x^2\cos x^4$　　B. $\int_{x^2}^{0}\cos t^2 \mathrm{d}t-2x^2\cos x^4$

C. $\int_{0}^{x^2}\cos t^2 \mathrm{d}t-2x^2\cos x^4$　　D. $\int_{x^2}^{0}\cos t^2 \mathrm{d}t$

22. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2 \mathrm{d}x=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{\pi}{2}$

23. 设函数 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（　　）.

A. 充分必要条件　　B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

24. 设 $f(x+y, xy)=x^2+y^2$，则 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=$（　　）.

A. $2x-2$　　B. $2x+2$　　C. $x-1$　　D. $x+1$

25. 设 $\int f(x)\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^2}+C$，则 $f(x)=$（　　）.

A. 1　　B. x^2　　C. e^{x^2}　　D. $2x$

26. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=$（　　）.

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{3}{2}$

27. 随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}2x & 0<x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$，以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$（　　）.

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{16}$　　C. $\frac{9}{64}$　　D. $\frac{9}{16}$

28. 设随机变量 $X\sim N(2, 9)$，且 $P(X\geqslant c)=P(X<c)$，则常数 c 等于（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

29. 已知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4)$ 为四阶方阵，其中 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4$ 均为四维列向量，且已知行列式 $|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=1$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$（　　）.

A. 5　　B. 10　　C. 20　　D. 40

30. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则有（　　）.

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示　　B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示　　D. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示

三、数学计算题：31~40 小题，本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

31. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)F(x) = \dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0) = 1$，$F(x) > 0$，试求 $F(x)$.

32. 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在 $(1, -1)$ 处相切，求 a，b 的值.

33. 计算不定积分 $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$.

34. 已知函数 $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求函数的增减区间及极值.

35. 设 $z = \dfrac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$，其中 f，φ 都是可导函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

36. 求定积分 $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

37. 设相互独立的随机变量 X，Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
p	0.5	0.5

求随机变量 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布律.

38. 从 0，1，2，3 四个数中，随机抽取两个，其积记为 Y，求 Y 的概率分布、数学期望和方差.

39. 问 a，b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$ 有唯一解？无解？有无穷多解？

40. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

2018 年经济类联考综合能力数学真题解析

21【答案】B

【解析】$f(x)=\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\mathrm{d}t=x\int_{x^2}^{0}\cos t^2\mathrm{d}t$，所以 $f'(x)=\int_{x^2}^{0}\cos t^2\mathrm{d}t-2x^2\cos x^4$.

22【答案】C

【解析】$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(x^2+2x\sqrt{1-x^2}+1-x^2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}1\mathrm{d}x=0+2=2$.

23【答案】A

【解析】由函数在某点可导的定义可得：

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)+f(x)|\sin x|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{f(x)|\sin x|}{x}$$
$$=f'(0)+\lim_{x\to0}\frac{f(x)|x|}{x}=f'(0)\pm f(0);$$

则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件.

24【答案】A

【解析】令 $x+y=u$，$xy=v$，则 $f(u,v)=u^2-2v$，所以 $f(x,y)=x^2-2y$，

故 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x-2$.

25【答案】D

【解析】两边求导得到 $f(x)\mathrm{e}^{x^2}=(\mathrm{e}^{x^2}+C)'=2x\mathrm{e}^{x^2}$，所以 $f(x)=2x$.

26【答案】B

【解析】$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\left[\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$.

27【答案】C

【解析】由已知 $P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$；则 $P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}$.

28【答案】B

【解析】由 $X\sim N(2,9)$ 知，正态分布概率密度函数的对称轴为 $x=2$，

又 $P(X\geqslant c)=P(X<c)$ 知，$x=c$ 为对称轴，所以 $c=2$.

29【答案】 **D**

【解析】 由 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, 2\boldsymbol{r}_2, 2\boldsymbol{r}_3, 2\boldsymbol{r}_4| = 2^3|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3, \boldsymbol{r}_4| = 2^3(|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|) = 40$.

30【答案】 **C**

【解析】 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，得到 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，又由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示，所以选 C. 此外，可取 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$，即可排除 A，B，D.

31【解析】 由已知 $f(x)F(x) = \dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，有 $2F(x)F'(x) = \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$，对此式两边同时求不定积分，可得 $F^2(x) = \int \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx = \int \dfrac{(x+1-1)e^x}{(1+x)^2}dx = \int \dfrac{e^x}{1+x}dx - \int \dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx =$

$\int \dfrac{1}{1+x}de^x - \int \dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx = \dfrac{e^x}{1+x} + \int \dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx - \int \dfrac{e^x}{(1+x)^2}dx = \dfrac{e^x}{1+x} + C$

由已知 $F(0) = 1$，所以 $C = 0$，根据 $F(x) > 0$，即 $F(x) = \sqrt{\dfrac{e^x}{1+x}}$.

32【解析】 由已知点 $(1, -1)$ 在曲线 $y = x^2 + ax + b$ 上，所以 $1 + a + b = -1$①，

而由曲线 $y = x^2 + ax + b$ 两边对 x 求导有 $y' = 2x + a$，所以 $y'(1) = 2 + a$，

对方程 $2y = -1 + xy^3$ 两边同时对 x 求导，有 $2y' = y^3 + 3xy^2y'$，则 $y'(1) = 1$，

根据切线斜率相等有 $2 + a = 1$②，所以由 ①② 可得 $a = -1$，$b = -1$.

33【解析】 $\int \dfrac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx = \int\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{1+x^2}\right)\arctan x dx = \int \dfrac{\arctan x}{x^2}dx - \int \dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$= \int \arctan x d\left(-\dfrac{1}{x}\right) - \int \dfrac{\arctan x}{1+x^2}dx = -\dfrac{1}{x}\arctan x + \int \dfrac{1}{x(1+x^2)}dx - \dfrac{1}{2}(\arctan x)^2$

$= -\dfrac{1}{x}\arctan x + \int\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}\right)dx - \dfrac{1}{2}(\arctan x)^2$

$= -\dfrac{1}{x}\arctan x + \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \dfrac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$

34【解析】 函数的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$，求导得到

$y' = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$，令 $y' = 0$，有 $x_1 = 0$，$x_2 = 3$.

分析各区间情况：

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	+	−	0	+
y	↗		↗	↘	极小值	↗

所以函数的单调增区间为 $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$，单调减区间为 $(1, 3)$. 极小值为 $y(3) = \dfrac{27}{4}$.

35【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2}f(xy) + \dfrac{y}{x}f'(xy) + y\varphi'(x+y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(xy) + \varphi(x+y) + y\varphi'(x+y)$.

36【解析】 换元求解，令 $t = \sqrt{1+\ln x}$，$x = e^{t^2-1}$，$dx = 2te^{t^2-1}dt$，

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t}{e^{t^2-1}} \cdot 2te^{t^2-1}dt = \int_1^{\sqrt{2}} t \cdot 2tdt = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}.$$

37【解析】 $Z = \max\{X, Y\} = \begin{cases} X & X \geqslant Y \\ Y & X < Y \end{cases}$,

$P(Z=0) = P(X=0, Y=0) = P(X=0)P(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$

$P(Z=1) = 1 - P(Z=0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$

故 Z 的分布律为：

Z	0	1
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

38【解析】 $P(Y=0) = \frac{C_3^1}{C_4^2} = \frac{1}{2}$; $P(Y=2) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$; $P(Y=3) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$; $P(Y=6) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$;

故分布律为：

Y	0	2	3	6
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

数学期望 $E(Y) = (2+3+6) \times \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$，$E(Y^2) = (2^2+3^2+6^2) \times \frac{1}{6} = \frac{49}{6}$，方差为 $D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{49}{6} - \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{173}{36}$.

39【解析】 对增广矩阵初等变换：

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

所以当 $a \neq 1$ 时，有唯一解；当 $a=1$，$b \neq -1$ 时，无解；当 $a=1$，$b=-1$ 时，有无穷多解.

40【解析】 由 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{X}$ 可得 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$.

而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2017 年经济类联考综合能力数学真题

二、数学单项选择题：第 21～30 小题，本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

21. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f'(x_0)=$（　　）.

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$　　B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$　　D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$

22. 已知 $x+\dfrac{1}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}x^2-\ln|x|$　　B. $x-\ln|x|+C$

C. $C-\ln|x|$　　D. $\dfrac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$

23. $\int_1^5 \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. e^3　　B. $2\mathrm{e}^3$　　C. $3\mathrm{e}^3$　　D. $4\mathrm{e}^4$

24. 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $\dfrac{4}{\pi}-1$　　B. $\dfrac{4}{\pi}+1$　　C. $\dfrac{2}{\pi}-1$　　D. $\dfrac{2}{\pi}+1$

25. 已知 $x=1$ 是函数 $y=x^3+ax^2$ 的驻点，则常数 $a=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

26. 设 $z=1+xy-\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=3\\y=4}}=$（　　）.

A. $\dfrac{17}{5}$　　B. $\dfrac{11}{5}$　　C. $\dfrac{7}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

27. 如下函数中，哪个不能作为随机变量 X 的分布函数（　　）.

A. $F_1(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x^2}{4} & 0\leqslant x<2\\ 1 & x\geqslant 2\end{cases}$　　B. $F_2(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{3} & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$

C. $F_3(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$　　D. $F_4(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} & x\geqslant 0\end{cases}$

28. 设随机变量 $X\sim N(1,1)$，概率密度为 $f(x)$，分布函数 $F(x)$，则下列正确的是（　　）.

A. $P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 0)$　　B. $P(X\leqslant 1)=P(X\geqslant 1)$

C. $f(x)=f(-x)$，$x\in\mathbf{R}$　　D. $F(x)=1-F(-x)$，$x\in\mathbf{R}$

29. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位阵，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{B}=$（　　）.

A. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

30. 已知 $\boldsymbol{AB}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$，$|\boldsymbol{B}|=2$，求 $|2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})^2|=$（　　）.

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

三、数学计算题：31~40 小题，本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

31. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x<1\\ a & x\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}b & x<0\\ e^{x} & x\geqslant 0\end{cases}$，且 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处连续，求 a，b 的值.

32. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $\int_0^{x^2} f(t-1)\,dt=x^3$，求 $f'(x)$.

33. 求不定积分 $\int e^x(1+e^x)^a\,dx$.

34. 设 $f(x)=\int_1^{x^2} e^{-t^2}\,dt$，试求 $\int_0^1 xf(x)\,dx$.

35. 设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+x$ 在 $x=1$ 处取得极大值 5，求常数 a 和 b.

36. 设 $u=f(x,y,z)=xy+xF(z)$，其中 F 为可微函数，且 $z=\frac{y}{x}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

37. 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p	0.4	0.3	0.3

求期望 $E(3X+5)$ 和方差 $(2X+3)$.

38. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3e^{-\frac{x^2}{2}} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$，求 X 的分布函数 $F(x)$ 和 $P(-2\leqslant X\leqslant 4)$.

39. 当 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\ -x_1+kx_2+x_3=k^2\\ x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$ 有唯一解？无解？无穷解？

40. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，求常数 k 的值.

2017年经济类联考综合能力数学真题解析

21 【答案】 D

【解析】 选项 A，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

选项 B，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

选项 C，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2f'(x_0)$.

选项 D，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)+f(x_0)-f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2f'(x_0)-f'(x_0)=f'(x_0)$.

所以选 D，其他选项均不对.

22 【答案】 D

【解析】 $x+\dfrac{1}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以 $\int f(x)\mathrm{d}x=x+\dfrac{1}{x}+C$，两边求导，

所以 $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$， 则 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\int\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$，所以选 D.

23 【答案】 B

【解析】 令 $t=\sqrt{2x-1}$，则 $\int_1^5 \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x=\int_1^3 \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t=(\mathrm{e}^t t-\mathrm{e}^t)\Big|_1^3=2\mathrm{e}^3$.

24 【答案】 A

【解析】 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，所以 $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\sin x}{x}+C$，两边求导，

有 $f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\dfrac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\dfrac{4}{\pi}-1$.

25 【答案】 C

【解析】 令 $y'=3x^2+2ax=0$，将 $x=1$ 代入，得 $a=-\dfrac{3}{2}$，所以选 C.

26 【答案】 A

【解析】 由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=3\\y=4}}=4-\dfrac{3}{5}=\dfrac{17}{5}$.

27【答案】 D

【解析】 易验证选项 A，B，C 满足分布函数的非负性、极限性、单调不减性和右连续性.

$\lim\limits_{x\to+\infty}F_4(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x}=0$，不满足极限性，故选 D.

28【答案】 B

【解析】 选项 A，$P(X\leqslant 0)=P\left\{\dfrac{X-1}{1}\leqslant -1\right\}=\Phi(-1)$；

$P(X\geqslant 0)=P\left\{\dfrac{X-1}{1}\geqslant -1\right\}=1-\Phi(-1)=\Phi(1)$，故选项 A 错误；

选项 B，由正态分布性质可知，$P(X\leqslant 1)=P(X\geqslant 1)=\dfrac{1}{2}$，故选项 B 正确；

选项 C，由正态分布性质可知，$f(x)$ 不是偶函数，故选项 C 错误；

选项 D，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\left\{\dfrac{X-1}{1}\leqslant\dfrac{x-1}{1}\right\}=\Phi(x-1)$，

$1-F(-x)=1-\Phi(-x-1)=\Phi(x+1)$，故选项 D 错误.

29【答案】 D

【解析】 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}\Rightarrow 2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$，

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$，故答案选 D.

30【答案】 D

【解析】 $|2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})^2|=2^3|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}|^2=8(|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}^{-1}|)^2=8\left(-1\times\dfrac{1}{2}\right)^2=2.$

31【解析】 根据 $f(x)+g(x)=\begin{cases}b+\mathrm{e}^{-x} & x<0\\ \mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x} & 0\leqslant x<1,\\ a+\mathrm{e}^{x} & x\geqslant 1\end{cases}$

在 $x=0$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 0^-}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 0^+}[f(x)+g(x)]=f(0)+g(0)$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}(b+\mathrm{e}^{-x})=\mathrm{e}^0+\mathrm{e}^0=2\Rightarrow b=1$.

在 $x=1$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to 1^-}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)+g(x)]=f(1)+g(1)$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})=\lim\limits_{x\to 1^+}(a+\mathrm{e}^{x})\Rightarrow a+\mathrm{e}=\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}\Rightarrow a=\mathrm{e}^{-1}$.

32【解析】 等式两边对 x 求导，$f(x^2-1)\cdot 2x=3x^2\Rightarrow f(x^2-1)=\dfrac{3}{2}x\Rightarrow f'(x^2-1)\cdot 2x=\dfrac{3}{2}\Rightarrow$

$f'(x^2-1)=\dfrac{3}{4x}$.

令 $u=x^2-1$，则 $x^2=1+u$，若 $x>0$，则 $x=\sqrt{1+u}$，$f'(u)=\dfrac{3}{4\sqrt{1+u}}$，即 $f'(x)=\dfrac{3}{4\sqrt{1+x}}$.

若 $x\leqslant 0$，则 $x=-\sqrt{1+u}$，$f'(u)=\dfrac{-3}{4\sqrt{1+u}}$，即 $f'(x)=\dfrac{-3}{4\sqrt{1+x}}$.

所以 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4\sqrt{1+x}} & x>0\\ \dfrac{-3}{4\sqrt{1+x}} & x\leqslant 0\end{cases}$.

33【解析】 分情况：当 $a\neq -1$，$\int(1+e^x)^a d(e^x+1)=\dfrac{(1+e^x)^{a+1}}{a+1}+C.$

当 $a=-1$，$\int\dfrac{e^x}{1+e^x}dx=\int\dfrac{d(1+e^x)}{1+e^x}=\ln(1+e^x)+C.$

34【解析】 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\Rightarrow f'(x)=e^{-x^4}\cdot 2x$,

$$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)d\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}\cdot f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2df(x)=-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot 2x\cdot e^{-x^4}dx=\frac{1}{4}(e^{-1}-1).$$

35【解析】 由题设可知

$f(1)=a+b+1=5$, $f'(1)=(3ax^2+2bx+1)\big|_{x=1}=3a+2b+1=0$,

$\begin{cases}a+b+1=5\\3a+2b+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-9\\b=13\end{cases}$.

36【解析】 根据 $u=xy+xF\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+F\left(\frac{y}{x}\right)+xF'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+F\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}F'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+xF'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x+F'\left(\frac{y}{x}\right).$$

37【解析】 根据 $E(3X+5)=3E(X)+5$，其中 $E(X)=-2\times0.4+2\times0.3=-0.2$,

所以 $E(3X+5)=3E(X)+5=4.4$.

$D(2X+3)=4D(X)$，其中 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2.8-0.04=2.76$,

所以 $D(2X+3)=4D(X)=4\times2.76=11.04$.

38【解析】 根据 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$,

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$,

当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\int_0^x\dfrac{1}{2}t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\int_0^x-\dfrac{1}{2}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$

$$=\int_0^{-\frac{x^2}{2}}ue^u du=ue^u-e^u\Big|_0^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}+1.$$

所以 $F(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{x^2}{2}}+1 & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$.

$P(-2\leqslant X\leqslant 4)=F(4)-F(-2)=1-9e^{-8}$.

39【解析】 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&k\\-1&k&1\\1&-1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&k\\0&k+1&k+1\\1&-1&2\end{vmatrix}=(k+1)\begin{vmatrix}1&1&k\\0&1&1\\1&-1&2\end{vmatrix}$

$$=(k+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & k-1\\0 & 1 & 0\\1 & -1 & 3\end{vmatrix}=(k+1)(4-k).$$

当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，即 $k\neq -1$ 且 $k\neq 4$ 时，方程组有唯一解.

当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，此时 $k=-1$ 或 $k=4$，

当 $k=4$ 时，$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -4\\0 & 2 & 2 & 8\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\\0 & 1 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

方程组有无穷多解，此时通解为 $k(-3,\ -1,\ 1)^{\mathrm{T}}+(0,\ 4,\ 0)^{\mathrm{T}}$.

当 $k=-1$ 时，$(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\-1 & -1 & 1 & 1\\1 & -1 & 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\0 & 0 & 0 & 5\\0 & -2 & 3 & -8\end{pmatrix}\to$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 4\\0 & -2 & 3 & -8\\0 & 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$，方程组无解.

40 【解析】 设 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，即

$x_1(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)+x_2(2\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3)+x_3(3\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$，整理得

$(x_1+2x_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2x_1+2x_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(kx_2+3x_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$.

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以$\begin{cases}x_1+2x_3=0\\2x_1+2x_2=0.\\kx_2+3x_3=0\end{cases}$

因为 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，所以齐次方程组有非零解.

$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\2 & 2 & 0\\0 & k & 3\end{vmatrix}=2(3+2k)=0$，所以 $k=-\dfrac{3}{2}$.

2016 年经济类联考综合能力数学真题

二、数学单项选择题：第 21~30 小题，本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

21. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 10^x，则 $f'(x)=($　　$)$.

A. 10^x　　B. $10^x\cdot\ln10$　　C. $10^x\cdot(\ln10)^2$　　D. $10^x\cdot(\ln10)^3$

22. 设函数 $f(u)$ 可导且 $f'(1)=0.5$，则 $y=f(x^2)$ 在 $x=-1$ 处的微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=-1}=($　　$)$.

A. $-\mathrm{d}x$　　B. 0　　C. $\mathrm{d}x$　　D. $2\mathrm{d}x$

23. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则 $f'(1)=($　　$)$.

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

24. 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int_a^x f(t+a)\mathrm{d}t=($　　$)$.

A. $F(x)-F(a)$　　B. $F(t)-F(a)$

C. $F(x+a)-F(x-a)$　　D. $F(x+a)-F(2a)$

25. 设 $F(x)=\int_0^{\sin x}\ln(1+t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=($　　$)$.

A. $\ln(1+x)$　　B. $\ln(1+\sin x)$

C. $\sin x\cdot\ln(1+\sin x)$　　D. $\cos x\cdot\ln(1+\sin x)$

26. 设 $y=x^2+ax+b$，已知当 $x=2$ 时，y 取得极小值 -3，则(　　).

A. $a=1,\ b=0$　　B. $a=-4,\ b=1$

C. $a=1,\ b=1$　　D. $a=-4,\ b=0$

27. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}-3a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}-3a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}-3a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=($　　$)$.

A. -3　　B. -2　　C. -1　　D. 1

28. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&t\\3&4&5\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $t=($　　$)$.

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

29. 一袋中有四只球，编号为 1，2，3，4，从袋中一次取出两只球，用 X 表示取出的两只球的最大号码数，则 $P\{X=4\}=($　　$)$.

A. 0.4　　B. 0.5　　C. 0.6　　D. 0.7

30. 设随机变量 $X\sim N(1,4)$，$Y\sim N(0,4)$，且 X，Y 相互独立，则 $D(2X-3Y)=($　　$)$.

A. 8　　B. 18　　C. 24　　D. 52

三、数学计算题：31~40 小题，本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

31. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\tan\dfrac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求未知参数 a 的值.

32. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内有连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$，试求 $f(0)$ 及 $f'(0)$.

33. 设生产 x 单位产品的总成本 C 是 x 的函数 $C(x)$，固定成本 $C(0)$ 为 20 元，边际成本函数为 $C'(x)=2x+10$(元/单位)，求总成本函数 $C(x)$.

34. 求曲线 $y=x^3-3x^2+5$ 的单调区间及极值.

35. 已知 $f(2)=2$，$\int_0^2 f(x)\,dx=4$，求 $\int_0^2 xf'(x)\,dx$.

36. 设 $z=f(xy,\ x+y^2)$，且 $f(u,v)$ 具有偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

37. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,k,5)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-3,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-1,1)^T$，问：
(1) 当 k 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关？
(2) 当 k 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？

38. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，求齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

39. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

40. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}a+\dfrac{b}{1+x^2} & x>0\\ c & x\leqslant 0\end{cases}$，求参数 a，b，c 的值.

2016 年经济类联考综合能力数学真题解析

21【答案】C

【解析】$f(x)=10^x\cdot\ln 10$，则$f'(x)=10^x\cdot(\ln 10)^2$.

22【答案】A

【解析】$\mathrm{d}y=f'(x^2)2x\mathrm{d}x$，当$x=-1$时，$\mathrm{d}y\big|_{x=-1}=-\mathrm{d}x$

23【答案】A

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{1-(1-x)}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$，故$f'(1)=-2$.

24【答案】D

【解析】$\int_a^x f(t+a)\mathrm{d}t=\int_a^x f(t+a)\mathrm{d}(t+a)=\int_{2a}^{x+a}f(u)\mathrm{d}u=F(x+a)-F(2a)$.

25【答案】D

【解析】$F'(x)=\ln(1+\sin x)\cos x$.

26【答案】B

【解析】$y'(2)=4+a=0$，所以$a=-4$，$y(2)=4-8+b=-3$，$b=4-3=1$.

27【答案】A

【解析】原式 $=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&-3a_{12}&a_{13}\\a_{21}&-3a_{22}&a_{23}\\a_{31}&-3a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-3$.

28【答案】A

【解析】$|\boldsymbol{A}|=0$，$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&t\\3&4&5\end{vmatrix}=0$，得$t=2$.

29【答案】B

【解析】$P\{X=4\}=\dfrac{C_3^1}{C_4^2}=0.5$.

30【答案】D

【解析】因为X与Y独立，所以$D(2X-3Y)=4D(X)+9D(Y)=4\times4+9\times4=52$.

31【解析】$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}a\mathrm{e}^{2x}=a$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{\tan\dfrac{x}{2}}=2$，$a=2$.

32【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}+\frac{f(x)}{x}\right]=1+\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

33【解析】 $C(x)=\int C'(x)\mathrm{d}x=x^2+10x+C$，因为 $C(0)=20$，可知 $C=20$.

$C(x)=x^2+10x+20$.

34【解析】 $y'=3x^2-6x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$，

$x\in(-\infty,0)$，$y'>0$，函数单调递增；$x\in(0,2)$，$y'<0$，函数单调递减；

$x\in(2,+\infty)$，$y'>0$，函数单调递增；因此，函数的极大值 $y(0)=5$，函数的极小值 $y(2)=1$.

35【解析】 $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-4=0$.

36【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'y+f_2'$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'x+2f_2'y$.

37【解析】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\k&-3&-1\\5&2&1\end{pmatrix}$,

(1) $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，线性无关，即 $\begin{vmatrix}1&1&2\\k&-3&-1\\5&2&1\end{vmatrix}\neq 0$，即 $k\neq -8$.

(2) $|\boldsymbol{A}|=0$，线性相关，即 $k=8$.

38【解析】 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，可知基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

39【解析】 $X\sim P(\lambda)$，则 $P\{X=1\}=\frac{\lambda^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$P\{X=2\}=\frac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

因为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，所以 $\lambda=2$，从而得 $E(X)=2$，$D(X)=2$.

40【解析】 $F(+\infty)=1$，即 $a=1$. $F(-\infty)=0$，即 $c=0$. $F(0+0)=F(0)$，即 $a+b=c$，得 $b=-1$.

2015 年经济类联考综合能力数学真题

二、数学单项选择题：第 21~30 小题，本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

21. 函数 $f(x)$ 可导，$f'(2)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{3x}=(\quad)$.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

22. 已知 $\mathrm{d}(x\ln x)=f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=(\quad)$.

A. $x\ln x$　　B. $1+x\ln x$

C. $x\ln x+C$（C 为任意常数）　　D. x^2+C（C 为任意常数）

23. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sin t\mathrm{d}t=(\quad)$.

A. $\sin x$　　B. $\sin x^2$　　C. $2x\sin x^2$　　D. $2x\cos x^2$

24. 已知 $\int_{-1}^{3}f(x)\mathrm{d}x=3$，$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=2$，则 $\int_0^{-1}f(x)\mathrm{d}x=(\quad)$.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

25. $y=f(x)$ 是由方程 $x^2y^2+y=1(y>0)$ 确定的，则 $y=f(x)$ 的驻点为(　　).

A. $x=0$　　B. $x=1$　　C. $x=0$ 或 1　　D. 不存在

26. 已知 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$ 对于任意的 x 和 y 都成立，则 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=(\quad)$.

A. $2x-2y$　　B. $2x+2y$　　C. $x+y$　　D. $x-y$

27. $F(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{2} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & x>1\end{cases}$，则 $F(x)$(　　).

A. 是离散型随机变量的分布函数

B. 是连续型随机变量的分布函数

C. 是分布函数，但既不是离散型随机变量的分布函数也不是连续型随机变量的分布函数

D. 不是分布函数

28. 随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则概率 $P\{|X-\mu|\leqslant\sigma\}$(　　).

A. 随着 σ 的增加而增加

B. 随着 σ 的减少而增加

C. 随着 σ 的增加不确定它的变化趋势

D. 随着 σ 的增加保持不变

29. 已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 是同阶方阵，下列说法错误的是(　　).

A. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$　　B. $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

C. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$　　D. $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$

30. 已知齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有零解，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$，则 $a=$（　　）.

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

三、数学计算题：31~40 小题，本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

31. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x} & x\leqslant 0\\ x^{2}+ax+b & x>0\end{cases}$，在 $x=0$ 处可导，求 a，b 的值.

32. 已知 $y=f(x)$ 是由方程 $e^{y}+xy=e$ 确定的，求 $f'(0)$.

33. 求不定积分 $\int e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

34. 已知函数 $f(x)$ 的原函数为 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x$.

35. 已知 $z=u^{2}\cos v$，$u=xy$，$v=2x+y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

36. 已知 $f(x)=2x^{3}-6x^{2}-18x+5$，求其单调区间和极值.

37. 随机变量 X 服从均匀分布 $U(0,a)$，且期望 $E(X)=3$.
求：(1) a 的值；(2) $D(2X+3)$.

38. 随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}ax^{2} & 0<x<3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$.
求：(1) a 的值；(2) 期望 $E(X)$.

39. 求 $\begin{cases}x_{1}-x_{2}+2x_{3}=1\\ 2x_{1}-x_{2}+7x_{3}=2\\ -x_{1}+2x_{2}+x_{3}=-1\end{cases}$ 的通解.

40. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_{1}=(1+k,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_{2}=(2,2+k,2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_{3}=(3,3,3+k,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_{4}=(4,4,4,4+k)^{\mathrm{T}}$.
(1) 当 k 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{2}$，$\boldsymbol{\alpha}_{3}$，$\boldsymbol{\alpha}_{4}$ 线性相关？
(2) 当 k 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{2}$，$\boldsymbol{\alpha}_{3}$，$\boldsymbol{\alpha}_{4}$ 线性无关？

2015年经济类联考综合能力数学真题解析

21【答案】A

【解析】令 $\Delta x=-x$，

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{3x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{-3\Delta x}=-\dfrac{1}{3}f'(2)=-1.$

22【答案】C

【解析】$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}(x\ln x)=x\ln x+C.$

23【答案】C

【解析】$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sin t\,\mathrm{d}t=\sin x^2\cdot(x^2)'=2x\sin x^2.$

24【答案】A

【解析】$\int_{-1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^{-1}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x,$

从而$\int_0^{-1}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-1}^{3}f(x)\,\mathrm{d}x=2-3=-1.$

25【答案】A

【解析】方程两边对 x 求导，则 $2xy^2+x^2\cdot 2y\cdot y'+y'=0$，

得 $y'=\dfrac{-2xy^2}{2x^2y+1}$，令 $y'=0$，得 $x=0$ 为其驻点.

26【答案】C

【解析】令 $x+y=u$，$x-y=v$，则 $f(u,v)=uv$，

$f(x,y)=xy$，从而$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=y+x.$

27【答案】D

【解析】$\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=1$，而 $F(1)=\dfrac{1}{2}$，即 $F(x)$ 在 $x=1$ 处不满足右连续，

因此 $F(x)$ 不是分布函数.

28【答案】D

【解析】$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$. 因此

$$P\{|X-\mu|\leqslant\sigma\}=P\{-\sigma\leqslant X-\mu\leqslant\sigma\}=P\left\{-1\leqslant\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant 1\right\}$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-[1-\Phi(1)]=2\Phi(1)-1\text{ 为常数，}$$

即与 σ 无关.

29【答案】 **D**

【解析】 在矩阵的运算中，加法的交换律、乘法的结合律以及乘法对加法的分配律是成立的，所以选项 A，B，C 是正确的. 乘法运算不满足交换律，即一般来讲 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，因此 $(\boldsymbol{AB})^2=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\neq\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

30【答案】 **A**

【解析】 由克莱姆法则，知

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&3&1\\1&a&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&a-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\a-1&1\end{vmatrix}=2-a=0，得 a=2.$$

31【解析】 由已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而

$\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+ax+b)=f(0)=e^0=1$，即 $b=1$.

又因为 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+ax+1-1}{x}$，得 $a=1$.

32【解析】 方程两边对 x 求导，得 $e^y\cdot y'+y+xy'=0$，

得 $y'=\dfrac{-y}{x+e^y}$，由 $e^y+xy=e$ 知，当 $x=0$ 时，$y=1$，

因此 $f'(0)=y'\big|_{x=0}=-\dfrac{1}{e}$.

33【解析】 令 $\sqrt{x}=t$，则 $\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx=dt$，$dx=2t\,dt$，从而

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\int 2te^t dt=2\left(te^t-\int e^t dt\right)=2te^t-2e^t+C=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C.$$

34【解析】 由已知 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，

$$而\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)dx=[xf(x)]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-1+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}-1.$$

35【解析】

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\cos v\cdot y+u^2\cdot(-\sin v)\cdot 2\\&=2xy^2\cos(2x+y)-2x^2y^2\sin(2x+y);\\\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\cos v\cdot x+u^2\cdot(-\sin v)\\&=2x^2y\cos(2x+y)-x^2y^2\sin(2x+y).\end{aligned}$$

36【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=6(x+1)(x-3)$，

$f(x)$ 在定义域内无不可导点，令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1$，$x_2=3$.

用 -1，3 将定义域分成小区间，

$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
$f(x)\uparrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$

即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 及 $(3, +\infty)$ 上为单调递增函数，在 $(-1, 3)$ 上为单调递减函数.

$x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点，极大值为

$$f(-1)=2\times(-1)^3-6\times(-1)^2-18\times(-1)+5=15.$$

$x=3$ 为 $f(x)$ 的极小值点，极小值为

$$f(3)=2\times3^3-6\times3^2-18\times3+5=-49.$$

37【解析】(1) $E(X)=\dfrac{0+a}{2}=3$，因此 $a=6$.

(2) $D(2X+3)=2^2D(X)=4\times\dfrac{(a-0)^2}{12}=12$.

38【解析】(1) 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)=1$，从而 $\int_0^3 ax^2\mathrm{d}x=1$，即 $\dfrac{ax^3}{3}\Big|_0^3=\dfrac{27a}{3}=1$，则 $a=\dfrac{1}{9}$.

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^3\dfrac{1}{9}x^3\mathrm{d}x=\dfrac{9}{4}$.

39【解析】增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&-1&7&2\\-1&2&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&3&0\\0&1&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&5&1\\0&1&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

原方程组等价于 $\begin{cases}x_1=1-5x_3\\x_2=-3x_3\end{cases}$

令 $x_3=0$，则 $x_2=0$，$x_1=1$，从而 $\boldsymbol{\eta}_0=(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 为其一个特解.

方程组的导出组等价于 $\begin{cases}x_1=-5x_3\\x_2=-3x_3\end{cases}$

令 $x_3=1$，则 $x_2=-3$，$x_1=-5$，即 $\boldsymbol{\eta}_1=(-5, -3, 1)^{\mathrm{T}}$ 是导出组的一个基础解系，因此方程组的通解为 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_0+k\boldsymbol{\eta}_1$（$k$ 为任意常数）.

40【解析】$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4|=\begin{vmatrix}1+k&2&3&4\\1&2+k&3&4\\1&2&3+k&4\\1&2&3&4+k\end{vmatrix}$

$$=(10+k)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&k&0&0\\0&0&k&0\\0&0&0&k\end{vmatrix}=k^3(k+10)$$

(1) 当 $k=0$ 或 $k=-10$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)<4$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

(2) 当 $k\neq0$ 且 $k\neq-10$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=4$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

2014年经济类联考综合能力数学真题

二、数学单项选择题：第21~30小题，本大题共10小题，每小题2分，共20分。

21. 已知 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}=(\quad)$.

A. $f'(0)$　　B. $2f'(0)$　　C. $\dfrac{1}{2}f'(0)$　　D. 不存在

22. 已知 $f(x)=x^2e^x$，则 $f''(0)=(\quad)$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

23. 已知 $y=f(x)$ 是方程 $xy-x^2=1$ 确定的函数，则 $y=f(x)$ 的驻点为$(\quad)$.

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. ± 1

24. 已知 $F'(x)=f(x)$，则下述式子中一定正确的是(其中 C 是任意常数)$(\quad)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+2C$　　B. $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)$

C. $\int F(x)\mathrm{d}x=f(x)+2C$　　D. $\int F(x)\mathrm{d}x=f(x)$

25. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{99}x\mathrm{d}x=(\quad)$.

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}\pi$

26. 设 $x>0$，则函数 $F(x)=\int_x^1\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 的导数为$(\quad)$.

A. $\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $\dfrac{\cos x}{x}$　　C. $-\dfrac{\sin x}{x}$　　D. $-\dfrac{\cos x}{x}$

27. 已知 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 是分布函数，则下述函数一定是分布函数的是$(\quad)$.

A. $F_1(x)+F_2(x)$　　B. $\dfrac{1}{2}F_1(x)+\dfrac{1}{2}F_2(x)$

C. $\dfrac{1}{3}F_1(x)+\dfrac{1}{3}F_2(x)$　　D. $\dfrac{1}{4}F_1(x)+\dfrac{1}{4}F_2(x)$

28. 已知随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $E(2X+1)=5$，则 $\mu=(\quad)$.

A. 0　　B. -1　　C. 2　　D. 1

29. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则下述结论必成立的是$(\quad)$.

A. $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$　　B. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

C. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$　　D. $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$

30. 方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\3x_1+3x_2+4x_3=2\\2x_1+2x_2+2x_3=2\end{cases}$ 的解的情况为$(\quad)$.

A. 唯一解　　B. 无解　　C. 无穷解　　D. 不确定

三、数学计算题：31~40 小题，本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

31. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\ln(x + y) = xy$ 确定，求 $dy\big|_{x=0}$.

32. 讨论函数 $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 11$ 的单调性及极值.

33. 计算不定积分 $\int x\cos(2 - 3x^2)\,dx$.

34. 计算定积分 $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

35. 设 $z = u^2\cos v$，且 $u = e^{xy}$，$v = 2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

36. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \leqslant 0 \\ \dfrac{a + b\cos x}{x} & x > 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导，求 a，b.

37. 设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} cx & 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，求

（1）常数 c 的值；（2）概率 $P\{X > 3\}$.

38. 设离散型随机变量 X 服从二项分布 $B(2, p)$，若概率 $P\{X \geqslant 1\} = \frac{5}{9}$，求

（1）参数 p 的值；（2）方差 $D(X)$.

39. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a, 2, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (2, a, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$，试确定 a 的值，使向量组线性相关.

40. 方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$ 是否有非零解？若有请用基础解系表示出通解.

2014 年经济类联考综合能力数学真题解析

21【答案】B

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(0)}{2x-0}=2f'(0)$.

22【答案】C

【解析】$f'(x)=2xe^x+x^2e^x$，$f''(x)=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x$，
从而$f''(0)=2e^0=2$.

23【答案】D

【解析】$y=\dfrac{1+x^2}{x}=x+\dfrac{1}{x}$，$y'=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$，
令 $y'=0$，则 $x^2-1=0$，得其驻点为 $x=\pm 1$.

24【答案】A

【解析】由已知，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，
从而必有$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+2C$(其中 C 为任意常数).

25【答案】A

【解析】由于$\sin^{99}x$ 为奇函数，由定积分性质，得$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{99}x\mathrm{d}x=0$.

26【答案】C

【解析】$F'(x)=\left(\int_x^1\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)'=-\dfrac{\sin x}{x}$.

27【答案】B

【解析】由已知 $F_1(+\infty)=1$，$F_2(+\infty)=1$，
若 $F(x)$ 为分布函数，则必有 $F(+\infty)=1$，
从而知 A，C，D 均不正确，答案只能选 B.

28【答案】C

【解析】由已知 $E(X)=\mu$，从而 $E(2X+1)=2E(X)+1=2\mu+1=5$，得 $\mu=2$.

29【答案】D

【解析】$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$.

30【答案】C

【解析】增广矩阵$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\3&3&4&2\\2&2&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

由 $r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$. 从而方程组有无穷多组解.

31【解析】 由已知 $x = 0$ 时，$\ln(0 + y) = 0 \cdot y = 0$，得 $y(0) = 1$.

方程 $\ln(x + y) = xy$ 两边对 x 求导，得 $\dfrac{1 + y'}{x + y} = y + xy'$.

令 $x = 0$，$\dfrac{1 + y'(0)}{0 + y(0)} = y(0) + 0 \cdot y'(0)$，因此 $y'(0) = 0$.

$\mathrm{d}y\big|_{x=0} = y'(0)\mathrm{d}x = 0$.

32【解析】 $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 11$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，

$y' = x^3 - 6x^2 + 5x = x(x - 1)(x - 5)$，

用驻点 $x_1 = 0$，$x_2 = 1$，$x_3 = 5$ 将定义域分为小区间

$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 5)$	$(5, +\infty)$
$y' < 0$	$y' > 0$	$y' < 0$	$y' > 0$
$y\downarrow$	$y\uparrow$	$y\downarrow$	$y\uparrow$

从而 y 在 $(-\infty, 0)$，$(1, 5)$ 为单调递减函数，y 在 $(0, 1)$，$(5, +\infty)$ 为单调递增函数.

$y(0) = -11$，$y(5) = -\dfrac{169}{4}$ 为其极小值. $y(1) = -\dfrac{41}{4}$ 为其极大值.

33【解析】
$$\int x\cos(2 - 3x^2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\int\cos(2 - 3x^2)\mathrm{d}(2 - 3x^2)$$
$$= -\frac{1}{6}\sin(2 - 3x^2) + C.$$

34【解析】
$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^4 (2\sqrt{x})'\ln x\mathrm{d}x = (2\sqrt{x}\ln x)\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{x}\mathrm{d}x$$
$$= 8\ln 2 - (4\sqrt{x})\Big|_1^4 = 8\ln 2 - 4.$$

35【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot u_x' = 2u\cos v \cdot \mathrm{e}^{xy} \cdot y = 2y\cos 2y \cdot \mathrm{e}^{2xy}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot u_y' + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot v_y' = 2u\cos v \cdot \mathrm{e}^{xy} \cdot x + (-u^2\sin v) \cdot 2 = 2x\cos 2y \cdot \mathrm{e}^{2xy} - 2\sin 2y \cdot \mathrm{e}^{2xy}$.

36【解析】 可导一定连续，从而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a + b\cos x}{x} = 0$，

则 $a + b\cos 0 = 0$，$a + b = 0$，$b = -a$ 成立.

$$f_-'(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^-}\frac{x - 0}{x - 0} = 1,$$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0^+}\frac{a + b\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{a(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x\to0^+}\frac{a \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{a}{2},$$

从而 $\dfrac{a}{2} = 1$，$a = 2$，$b = -2$.

37【解析】(1)$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_2^4 cx\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}cx^2\right)\Big|_2^4 = 6c = 1$，即 $c = \frac{1}{6}$.

(2)$P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_3^4 \frac{1}{6}x\mathrm{d}x = \frac{7}{12}$.

38【解析】(1)$P\{X = 0\} = 1 - P\{X \geqslant 1\} = \frac{4}{9}$，即 $\mathrm{C}_2^0 p^0(1-p)^2 = \frac{4}{9}$，得 $p = \frac{1}{3}$.

(2)$D(X) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

39【解析】$\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1-a \\ 0 & a & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(1-a) \\ 0 & 0 & (a-3)(a+2) \end{pmatrix}$

若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $(a-3)(a+2) = 0$.

得 $a = 3$ 或 $a = -2$.

40【解析】$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

由于 $r(\boldsymbol{A}) = 2 < 3$(未知量个数)，所以方程组有非零解.

原方程组与$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$同解，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$为其一个基础解系，

通解为 $\boldsymbol{x} = k\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

2013 年经济类联考综合能力数学真题

二、数学单项选择题：第 21～30 小题，本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

21. 设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处可导，则 $f'(x_0) = ($　　$)$.

A. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$　　B. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

C. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$　　D. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$

22. 已知 $x = 1$ 是函数 $y = x^3 + ax^2$ 的驻点，则常数 $a = ($　　$)$.

A. 0　　B. 1　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

23. 函数 $y = \ln(1 + 2x^2)$，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0} = ($　　$)$.

A. 0　　B. 1　　C. $\mathrm{d}x$　　D. $2\mathrm{d}x$

24. 设 $\sin x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x = ($　　$)$.

A. $x\cos x - \sin x$　　B. $x\cos x - \sin x + C$

C. $x\sin x - \cos x$　　D. $x\sin x - \cos x + C$

25. 设 $F(x) = \int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，则 $F'(0) = ($　　$)$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

26. 设 $f(x) = \mathrm{e}^x + x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = ($　　$)$.

A. 0　　B. $\dfrac{4}{3}(\mathrm{e} - 1)$　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. e

27. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是(　　).

A. $\boldsymbol{A}$ 的任意行向量都是非零向量　　B. 线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有解

C. $\boldsymbol{A}$ 的任意列向量都是非零向量　　D. 线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解

28. 设 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，C_1，C_2 是两个任意常数，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解是(　　).

A. $C_1\boldsymbol{\eta}_1 + C_2(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{2}$　　B. $C_1\boldsymbol{\eta}_1 + C_2(\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) + \dfrac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2}$

C. $C_1\boldsymbol{\eta}_1 + C_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) + \dfrac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{2}$　　D. $C_1\boldsymbol{\eta}_1 + C_2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) + \dfrac{\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2}{2}$

29. 设 X 为连续型随机变量，$F(x)$ 为 X 的分布函数，则 $F(x)$ 在其定义域内一定为(　　).

A. 非二阶间断函数　　B. 阶梯函数

C. 可导函数　　D. 连续但不一定可导函数

30. 设随机变量 X 服从参数为 2 的泊松分布，$Z = 3X - 2$，则随机变量 Z 的期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$ 分别为(　　).

A. $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{9}{4}$　　B. $-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}$　　C. 4，18　　D. 4，6

三、数学计算题：31~40 小题，本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

31. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

32. 求函数 $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 的导函数.

33. 求定积分$\displaystyle\int_0^8\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$.

34. 求函数 $y=x^4-2x^3+1$ 的单调区间和极值点.

35. 设二元函数 $z=\mathrm{e}^{xy}f(x^2+y)$，其中 $f(w)$ 是一个可导函数，求偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

36. 设 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

37. 求 t 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(t,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,t,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1)$ 线性相关，并在线性相关时，将其中一个向量用其余向量线性表出.

38. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，求

(1) $\boldsymbol{A}^n$ (n 为正整数)；(2) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵($\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵).

39. 设随机变量 X 的密度为 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}} & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$，求

(1) 常数 C；(2) $P\left(-\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{1}{2}\right)$.

40. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\delta^2)$，且 $P(2<X<4)=0.3$，求 $P(X<0)$.

2013 年经济类联考综合能力数学真题解析

21【答案】D

【解析】根据导数的定义有，若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

因此对于 A 选项，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=-f'(x_0)$；

对于 B 选项，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-f'(x_0)$；

对于 C 选项，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2\lim\limits_{2\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}=2f'(x_0)$；

对于 D 选项，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$

$=2f'(x_0)-f'(x_0)=f'(x_0)$. 因此选择 D.

22【答案】C

【解析】要求函数的驻点，首先要对函数求导得到：$y'=3x^2+2ax$. 由于 $x=1$ 是函数的驻点，因此：$y'(1)=3+2a=0\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2}$.

23【答案】A

【解析】根据复合函数的求导法则可以得到：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{1+2x^2}\Rightarrow dy=\dfrac{4x}{1+2x^2}dx$.

因此 $dy\big|_{x=0}=0$.

24【答案】B

【解析】利用不定积分的分部积分法可以得到：

$$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx.$$

因为 $\sin x$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，因此 $\int f(x)dx=\sin x+C'$，$f(x)=(\sin x)'=\cos x$.

则 $\int xf'(x)dx=x\cos x-\sin x+C$.

25【答案】B

【解析】根据导数定义有：

$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt}{x}$，很明显是 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式，因此使用洛必达法则，应用变上限积分的求导法则可以得到：

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

26【答案】 B

【解析】 不妨设$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$，则$f(x)=\mathrm{e}^x+x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+ax^3$.

则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\mathrm{e}^x+ax^3)\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^x+\frac{a}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\mathrm{e}+\frac{a}{4}-1=a\Rightarrow a=\frac{4}{3}(\mathrm{e}-1)$.

27【答案】 D

【解析】 n阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆的充要条件为$|\boldsymbol{A}|\neq0$，根据克莱姆法则可以知道线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解，$\boldsymbol{A}$的任意行(列)向量线性无关，线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有唯一解.

28【答案】 B

【解析】 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$是导出组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，则$\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$也是基础解系.

同时$\boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}\right)=\frac{1}{2}\boldsymbol{Ar}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{Ar}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}$，因此$\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}$是线性方程组一个非零的特解.

则通解为$C_1\boldsymbol{\eta}_1+C_2(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+\frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}$.

29【答案】 D

【解析】 连续变量的分布函数是连续函数但是不一定可导，因此选择D选项.

30【答案】 C

【解析】 由于随机变量X服从参数为2的泊松分布，因此可以得到$E(X)=2$，$D(X)=2$.

则$E(Z)=E(3X-2)=3E(X)-2=4$，$D(Z)=D(3X-2)=9D(X)=18$.

31【解析】 对于$\infty-\infty$型的未定式，可以变化成$\frac{0}{0}$或者$\frac{\infty}{\infty}$，利用等价无穷小和洛必达法则来进行计算.

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\cdot x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x}{2x(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

32【解析】

函数可以写为：$\begin{cases}y=\ln s\\ s=\dfrac{1+t}{1-t}\\ t=\sqrt{x}\end{cases}$

利用复合函数求导法则，可以得到：$y'=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}$.

33【解析】 利用定积分的换元积分法进行求解，不妨令$t=\sqrt[3]{x}$，则

$$\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int_0^2 \frac{dt^3}{1+t} = 3\int_0^2 \frac{t^2}{1+t}dt = 3\int_0^2 \frac{(t+1-1)^2}{1+t}dt = 3\int_0^2 \frac{(t+1)^2-2(t+1)+1}{1+t}dt$$

$$= 3\int_0^2 \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt = 3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)\Bigg|_0^2 = 3(2-2+\ln 3) = 3\ln 3.$$

34【解析】 求函数的单调区间和极值点可以利用函数的导数来进行求解.

则 $y' = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$，$y'' = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$.

令 $y' = 0$ 得到两个驻点 $x = 0$ 和 $x = \frac{3}{2}$.

	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y''		0		$+$	
	递减	拐点	递减	极小值点	递增

可以看出减区间为 $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$，增区间为 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. 只有极小值点 $x = \frac{3}{2}$，极小值为 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{16} - \frac{27}{4} + 1 = -\frac{11}{16}$.

35【解析】 根据二元函数的求偏导的法则以及导数的乘法法则有：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{xy} \cdot y) \cdot f + e^{xy} \cdot (f' \cdot 2x) = e^{xy}(yf + 2xf');$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^{xy} \cdot x) \cdot f + e^{xy} \cdot (f' \cdot 1) = e^{xy}(xf + f').$$

36【解析】 根据定积分的分部积分法可以得到 $\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x df(x)$.

由变上限积分求导法则可知 $f'(x) = e^{-x^2}$.

则原式 $= xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x df(x) = f(1) - \int_0^1 xe^{-x^2}dx = \int_1^1 e^{-t^2}dt - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}dx^2$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x^2}d(-x^2) = \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{e^{-1}-1}{2}.$$

37【解析】 根据题意可以得到 $(\boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T, \boldsymbol{\alpha}_3^T) = \begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$.

若三个向量线性相关，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1-t \\ 0 & t & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 - t(1-t) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2) = 0 \Rightarrow t = 3$$

或者 $t = -2$.

当 $t = 3$ 时，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

当 $t=-2$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{3}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

38【解析】

(1) 由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$；

$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 因此当 $n\geqslant 3$ 时，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$.

(2) $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$

因此 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

39【解析】 (1) 根据概率密度函数的定义可知$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$，即

$\int_{-1}^{1}\dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=C\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=C\pi=1\Rightarrow C=\dfrac{1}{\pi}$.

(2) $P\left(-\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\pi}\arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$.

40【解析】 由于随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\delta^2)$，则

$P(2<X<4)=P\left(\dfrac{2-2}{\delta}<\dfrac{X-2}{\delta}<\dfrac{4-2}{\delta}\right)=\Phi\left(\dfrac{2}{\delta}\right)-\Phi(0)=\Phi\left(\dfrac{2}{\delta}\right)-\dfrac{1}{2}=0.3$

$\Rightarrow\Phi\left(\dfrac{2}{\delta}\right)=0.8$.

因此 $P(X<0)=P\left(\dfrac{X-2}{\delta}<-\dfrac{2}{\delta}\right)=\Phi\left(-\dfrac{2}{\delta}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{2}{\delta}\right)=1-0.8=0.2$.

2012 年经济类联考综合能力数学真题

二、数学单项选择题：第 21~30 小题，本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

21. 函数 $f(x) = \ln x - \ln(1-x)$ 的定义域是(　　).

A. $(-1, +\infty)$　B. $(0, +\infty)$　C. $(1, +\infty)$　D. $(0, 1)$

22. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x}\sin x\right) = $(　　).

A. 1　B. 0　C. -1　D. 不存在

23. 设 $f(x) = \arcsin x^2$，则 $f'(x) = $(　　).

A. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　B. $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$　C. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$　D. $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

24. $x = 0$ 是函数 $f(x) = e^{x^2+x}$ 的(　　).

A. 零点　B. 驻点　C. 极值点　D. 非极值点

25. 不定积分 $\int \sin x\cos x\mathrm{d}x$ 不等于(　　).

A. $\dfrac{1}{2}\sin^2 x + C$　B. $\dfrac{1}{2}\sin^2 2x + C$　C. $-\dfrac{1}{4}\cos 2x + C$　D. $-\dfrac{1}{2}\cos^2 x + C$

26. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x$，$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x$，则 I，J 的大小关系是(　　).

A. $I < J$　B. $I > J$　C. $I \leqslant J$　D. $I \geqslant J$

27. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B} = $(　　).

A. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

28. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则(　　).

A. $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出　B. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出

C. $\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出　D. $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出

29. 设随机变量 X，Y 服从正态分布，$X \sim N(\mu, 16)$，$Y \sim N(\mu, 25)$，记 $P_1 = P\{X \leqslant \mu - 4\}$，$P_2 = P\{Y \geqslant \mu + 5\}$，则(　　).

A. 只有 μ 的个别值，才有 $P_1 = P_2$　B. 对任意实数 μ 都有 $P_1 < P_2$

C. 对任意实数 μ 都有 $P_1 = P_2$　D. 对任意实数 μ 都有 $P_1 > P_2$

30. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，若 $E[(X-1)(X-2)] = 1$，则参数 $\lambda = $(　　).

A. 3　B. -1　C. 1　D. 2

三、数学计算题：31~39 小题，本大题共 9 小题，共 50 分。

31. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$.

32. 求定积分 $\int_1^e \dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x$.

33. 已知函数$f(x) = x^x + \sqrt{1+x^2}$，求$f''(x)$.

34. 求函数$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$的极值.

35. 求由方程$xyz = \arctan(x+y+z)$确定的隐函数$z = z(x, y)$的$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

36. 求矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$的伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$.

37. 求线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \end{cases}$的通解.

38. 设三次独立试验中事件A在每次试验中发生的概率均为p，已知A至少发生一次的概率为$\dfrac{19}{27}$，求p.

39. 设连续型随机变量X的分布函数为$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ax^2 & 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$，求：

(1) 常数A；(2)X的概率密度函数$f(x)$；(3)$P\left\{\dfrac{1}{5} < X < \dfrac{1}{3}\right\}$.

2012 年经济类联考综合能力数学真题解析

21【答案】 D

【解析】 根据对数函数的定义：$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$. 因此选择 D.

22【答案】 A

【解析】 根据极限的加法运算法则、重要极限$\left(\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\right)$以及无穷小的相关性质(无穷小和有限的实数相乘仍为无穷小)可以得：

$$\lim_{x \to 0}\left(x\sin\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sin x\right) = \lim_{x \to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}\sin x\right) = 0 + 1 = 1.$$

23【答案】 D

【解析】 函数 $f(x)$ 可以看作一个复合函数：$\begin{cases} y = \arcsin t \\ t = x^2 \end{cases}$，根据复合函数求导法则有：

$f'(x) = y'_t \cdot t'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$. 因此选择 D.

24【答案】 D

【解析】 根据零点的定义，$f(0) = e^0 = 1 \neq 0$，因此不是零点.

B、C、D 项的判断均需要借助于导数，下面根据复合函数的求导法则进行计算.

$f'(x) = e^{x^2+x} \cdot (2x + 1)$，而 $f'(0) = 1 \neq 0$，因此不是驻点也不是极值点，选择 D.

25【答案】 B

【解析】 利用不定积分换元法求得：

$$\int \sin x\cos x\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x) + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C'$$
$$= \frac{1}{4}(1 - \cos 2x) + C = -\frac{1}{4}\cos 2x + C''$$

因此只有 B 项不正确.

26【答案】 A

【解析】 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时，$1 > \cos x > \sin x > 0$，即 $\ln\sin x < \ln\cos x$，则 $I < J$.

27【答案】 B

【解析】 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{B} + 2\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}) = 2\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{B} = 2(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})^{-1}$，

由于 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，则

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \vdots \boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right),$$

则 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

28【答案】 **D**

【解析】 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，其中三个系数不全为零. 若 $k_3=0$，则 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，必然有 $k_1=k_2=0$，和前面矛盾，因此 $k_3\neq 0$，也就是说 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，即 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

29【答案】 **C**

【解析】 $X\sim N(\mu, 16)$，则 $P_1=P\{X\leqslant\mu-4\}=P\left\{\frac{X-\mu}{4}\leqslant\frac{\mu-4-\mu}{4}\right\}=P\left\{\frac{X-\mu}{4}\leqslant -1\right\}$

$=\Phi(-1)$.

$Y\sim N(\mu, 25)$，则 $P_2=P\{Y\geqslant\mu+5\}=P\left\{\frac{Y-\mu}{5}\geqslant\frac{\mu+5-\mu}{5}\right\}=1-P\left\{\frac{Y-\mu}{5}<1\right\}$

$=1-\Phi(1)=\Phi(-1)$. 因此选择 C 项.

30【答案】 **C**

【解析】 随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，则 $E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$，$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\lambda+\lambda^2$.

则 $E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2)=E(X^2)-3E(X)+2=\lambda+\lambda^2-3\lambda+2=1$.

即 $\lambda^2-2\lambda+1=0\Rightarrow(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda=1$. 因此选择 C.

31【解析】 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\to 0$，$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\to 0$.

因此原式为 $\frac{0}{0}$ 型的未定式，可以使用洛必达法则进行计算.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2.$$

32【解析】 利用换元法进行定积分的计算，令 $t=1+\ln x$，$x=\mathrm{e}^{t-1}$，

积分上下限分别为 1 和 2.

则 $\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^{t-1}}\mathrm{d}\mathrm{e}^{t-1}=\int_1^2\frac{\sqrt{t}}{\mathrm{e}^{t-1}}\mathrm{e}^{t-1}\mathrm{d}t=\int_1^2\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$.

33【解析】 方法一：$f(x)=x^x+\sqrt{1+x^2}=\mathrm{e}^{\ln x^x}+\sqrt{1+x^2}=\mathrm{e}^{x\ln x}+\sqrt{1+x^2}$.

下面利用复合函数和乘积的求导法则进行求导.

$$f'(x)=\mathrm{e}^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)+(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x.$$

$$f''(x)=\mathrm{e}^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot(\ln x+1)+\mathrm{e}^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}+(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\cdot x$$

$$=\mathrm{e}^{x\ln x}(\ln x+1)^2+\mathrm{e}^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}+(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}-x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= x^x\left[(\ln x)^2 + 2\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right] + \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

方法二：将函数拆分，设$f(x) = y + h(x)$，其中 $y = x^x$，$h(x) = \sqrt{1+x^2}$.

由于 $y = x^x$，则两边同时取对数得：$\ln y = \ln x^x = x\ln x$. 两边同时对 x 求导得：

$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1)$，再同时求导得：$y'' = y'(\ln x + 1) + y \cdot \frac{1}{x}$，将 $y' = x^x(\ln x + 1)$ 和 $y = x^x$ 代入得：$y'' = x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}$.

$$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ h''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

因此$f''(x) = y'' + h''(x) = x^x\left[(\ln x)^2 + 2\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right] + \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

34【解析】 首先对函数求导，得到：$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$.

令$f'(x) = 0$可以得到两个驻点为 $x = -2$ 和 $x = 1$.

当 $x < -2$ 或 $x > 1$ 时，$f'(x) > 0$，因此函数单调递增；当 $-2 < x < 1$ 时，$f'(x) < 0$，因此函数单调递减.

则 $x = -2$ 为极大值点，极大值是$f(-2) = 21$；$x = 1$ 为极小值点，极小值是$f(1) = -6$.

35【解析】 方法一：

对方程左右两边同时关于 x 求偏导，得：$yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(x+y+z)^2}\cdot\left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right)$，即

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + yz(x+y+z)^2 - 1}{xy + xy(x+y+z)^2 - 1}.$$

对方程左右两边同时关于 y 求偏导，得：$xz + xy\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(x+y+z)^2}\cdot\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right)$，即

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz + xz(x+y+z)^2 - 1}{xy + xy(x+y+z)^2 - 1}.$$

方法二：设 $F(x, y, z) = xyz - \arctan(x+y+z)$，分别对 x，y，z 求偏导得：

$$F_x' = yz - \frac{1}{1+(x+y+z)^2};\ F_y' = xz - \frac{1}{1+(x+y+z)^2};\ F_z' = xy - \frac{1}{1+(x+y+z)^2}.$$

则$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'} = -\frac{yz + yz(x+y+z)^2 - 1}{xy + xy(x+y+z)^2 - 1}$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'} = -\frac{xz + xz(x+y+z)^2 - 1}{xy + xy(x+y+z)^2 - 1}$.

36【解析】 方法一：利用逆矩阵进行求解. 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

则 $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \times 5 = (4-6)\times 5 = -10.$

$$(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}20 & -10 & 0\\ -15 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

方法二：利用分块矩阵进行求解.

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{m\times m} & \boldsymbol{O}_{m\times n}\\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{C}_{n\times n}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^{-1}{}_{m\times m} & \boldsymbol{O}_{m\times n}\\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{C}^{-1}{}_{n\times n}\end{pmatrix}$.

因此可以很容易得到：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\times 5=(4-6)\times 5=-10.$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}，\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{4}{1\times4-2\times3} & -\frac{2}{1\times4-2\times3}\\ -\frac{3}{1\times4-2\times3} & \frac{1}{1\times4-2\times3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}，\boldsymbol{C}^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right).$$

因此 $\boldsymbol{A}^{*}=\begin{pmatrix}20 & -10 & 0\\ -15 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

37【解析】 该非齐次线性方程组的增广矩阵为：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 4 & 4\\ 1 & -1 & 2 & -4\\ -1 & 4 & 1 & 16\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & -2 & -2 & -8\\ 0 & 5 & 5 & 20\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

可以看出导出组的基础解系中只含有一个解向量为$\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

一个特解为$\begin{pmatrix}-6\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$. 通解为：$\begin{pmatrix}-6\\ 2\\ 2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+3k\\ 2+k\\ 2-k\end{pmatrix}(k\in\mathbf{R})$.

38【解析】 根据三重伯努利概型可知，事件 A 至少发生一次的反面为一次都不发生，

因此事件 A 至少发生一次的概率为 $1-(1-p)^3$. 则有 $1-(1-p)^3=\frac{19}{27}\Rightarrow p=\frac{1}{3}$.

39【解析】

(1) 由于连续型随机变量的分布函数为右连续的，因此$\lim\limits_{x\to1^+}Ax^2=1\Rightarrow A=1$.

(2) 由于 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}$，因此由$f(x)=F'(x)$ 可知：$f(x)=\begin{cases}0 & 其他\\ 2x & 0\leqslant x<1\end{cases}$.

(3) $P\left\{\frac{1}{5}<X<\frac{1}{3}\right\}=F\left(\frac{1}{3}\right)-F\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{25}=\frac{16}{225}$.

2011 年经济类联考综合能力数学真题

二、数学单项选择题：第 21~30 小题，本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分。

21. 设 $f(x)=\arccos(x^2)$，则 $f'(x)=(\quad)$.

A. $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　B. $-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$　C. $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$　D. $-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

22. 不定积分 $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=(\quad)$.

A. $\sqrt{1-x^2}+C$　B. $-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$

C. $x\sqrt{1-x^2}+C$　D. $-\dfrac{1}{3}x\sqrt{(1-x^2)^3}+C$

23. 函数 $f(x)=x^3+6x^2+9x$，那么(　　).

A. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点　B. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

C. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点　D. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点

24. 设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内有 $f'(x)<0$ 且 $f''(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内(　　).

A. 单调增加，图像上凹　B. 单调增加，图像下凹

C. 单调减少，图像上凹　D. 单调减少，图像下凹

25. 函数 $y=f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)\,dx$ 在几何上表示(　　).

A. 曲边梯形的面积　B. 梯形的面积　C. 曲边三角形的面积　D. 三角形的面积

26. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵 $(n>1)$，m 是大于 1 的整数，则必有(　　).

A. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$　B. $(\boldsymbol{AB})^m=\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m$

C. $|(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$　D. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

27. 设线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则必有(　　).

A. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关　B. $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关

C. $s\geqslant 4$　D. $s\leqslant 4$

28. 若线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=1\\2x_1-4x_2+kx_3=3\end{cases}$ 无解，则数 k 等于(　　).

A. 6　B. 4　C. 3　D. 2

29. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，若 $E(X^2)=72$，则参数 $\lambda=(\quad)$.

A. 6　B. 3　C. $\dfrac{1}{3}$　D. $\dfrac{1}{6}$

30. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2} & 0\leqslant x<1\\ 1-e^{-x} & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=(\quad)$.

A. 0　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{1}{2}-e^{-1}$　D. $1-e^{-1}$

三、数学计算题：31~40 小题，本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

31. 求函数 $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ 的单调增减区间和极值.

32. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+5x+6}$.

33. 设 $f'(x) = \cos x - 2x$ 且 $f(0) = 2$，求 $f(x)$.

34. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z - xyz = 0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

35. 已知某种产品的需求函数为 $P = 10 - \frac{Q}{5}$，成本函数为 $C = 50 + 2Q$，求产量 Q 为多少时总利润最大?

36. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 1-(1+x)\mathrm{e}^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$，求随机变量 X 的概率密度和概率 $P\{X > 2\}$，$P\{1 < X \leqslant 2\}$.

37. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1, 2)$，Y 服从泊松分布 $P(2)$. 求期望 $E(2X - Y + 3)$.

38. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ 的全部解(要求用基础解系表示).

39. k 为何值时，矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 可逆，并求逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

40. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 的秩.

2011 年经济类联考综合能力数学真题解析

21【答案】D

【解析】$f'(x)=[\arccos(x^2)]'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}(x^2)'=-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

22【答案】B

【解析】$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x^2=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times(-1)\times(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$$

23【答案】B

【解析】根据题意，可求得：$f'(x)=3x^2+12x+9$，$f''(x)=6x+12$，

令 $f'(x)=3x^2+12x+9=0$，得到 $x=-1$ 或 -3

由于 $f''(-1)=-6+12=6>0$，所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

由于 $f''(-3)=-18+12=-6<0$，所以 $x=-3$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

24【答案】D

【解析】根据 $f'(x)<0$ 知函数单调减小，根据 $f''(x)<0$ 知函数图像下凹，故选 D 项.

25【答案】C

【解析】$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^a x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\Big|_0^a-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=af(a)-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，

所以，原积分代表矩形减去以 $f(x)$ 为曲边的梯形面积后所剩的面积（注意矩形和曲边梯形有公共点 $(a,f(a))$），即曲边三角形的面积.

26【答案】C

【解析】根据矩阵乘法和转置矩阵以及矩阵的行列式性质，可知：

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$(\boldsymbol{AB})^m=\underbrace{\boldsymbol{AB}\cdots\boldsymbol{AB}}_{m\text{个}\boldsymbol{AB}}\neq\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{B}^m$

$|(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|$，$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$. 故选择 C 项.

27【答案】C

【解析】利用排除法求解

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_5=\boldsymbol{\beta}_6=\cdots=\boldsymbol{\beta}_s$，$s>4$，这样定义的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 满足题意要求，且线性相关，所以 B 项错误；若令上例中 $s=4$，则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 满足题意要求，且线性无关，所以 A 项错误；若 $s<4$，因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，所以存在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得：$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{A}$，因为 $s<4$，所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_s$ 的秩小于 4，从而矩阵 $(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\boldsymbol{A}$ 的秩小于 4，而由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关可知，矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的秩等于 4，

两者矛盾，所以 D 项错误. 所以，C 项正确.

28【答案】A

【解析】该线性方程组的系数增广矩阵为：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 1\\ 2 & -4 & k & 3\end{array}\right)\xrightarrow{\text{第 2 行减去第 1 行的 2 倍}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & 0 & k-6 & 1\end{array}\right),$$

因为该线性方程组无解，所以 $k-6=0$，故 $k=6$.

29【答案】D

【解析】$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2$，在指数分布中，$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，$D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$，所以$\dfrac{1}{\lambda^2}+\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2=72$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{6}$(因为在指数分布中 $\lambda>0$，所以 $\lambda=-\dfrac{1}{6}$ 舍去).

30【答案】C

【解析】$P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=1-e^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-e^{-1}$，所以 C 项正确.

31【解析】$f(x)=(x-1)^2(x+1)^2=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1$，

求导得到：$f'(x)=4x^3-4x$，$f''(x)=12x^2-4$.

令 $f'(x)=0$，得函数的驻点为：$x=0$，$x=\pm1$.

且当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

所以，函数的单调减区间为：$(-\infty,-1)$，$(0,1)$；单调增区间为：$(-1,0)$，$(1,+\infty)$.

并且，$x=0$ 是函数的极大值点，$x=-1$ 和 $x=1$ 是函数的极小值点.

32【解析】

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2+5x+6}=\int_0^1\frac{dx}{(x+2)(x+3)}=\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{x+2}dx-\int_0^1\frac{1}{x+3}dx$$

$$=\ln(x+2)\Big|_0^1-\ln(x+3)\Big|_0^1=\ln3-\ln2-\ln4+\ln3=2\ln3-3\ln2$$

33【解析】$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\cos x-2x)dx=\sin x-x^2+C$，把$f(0)=2$代入，得 $C=2$，所以$f(x)=\sin x-x^2+2$.

34【解析】隐函数等式两端分别对 x 求偏导，得：

$1+\dfrac{\partial z}{\partial x}-yz-xy\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，解得：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-yz}{xy-1}$.

隐函数等式两端分别对 y 求偏导，得：

$1+\dfrac{\partial z}{\partial y}-xz-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，解得：$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1-xz}{xy-1}$.

35【解析】 设利润函数为$f(Q)$，则

$$f(Q)=PQ-C=\left(10-\frac{Q}{5}\right)Q-(50+2Q)=-\frac{Q^2}{5}+8Q-50,$$

$f'(Q)=-\frac{2Q}{5}+8$，$f''(Q)=-\frac{2}{5}<0$，令$f'(Q)=0$，解得$Q=20$.

又因为$f''(Q)<0$，所以$Q=20$是函数的极大值点，因为只有一个驻点，所以$Q=20$是函数的最大值点，所以产量为20时利润最大.

36【解析】 当$x<0$时，$f(x)=F'(x)=0$；

当$x=0$时，$f(0)=F(0)-F(0-0)=0$；

当$x>0$时，$f(x)=F'(x)=0-e^{-x}-(1+x)e^{-x}\cdot(-1)=xe^{-x}$.

所以随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}xe^{-x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases}$.

$P\{X>2\}=1-P\{X\leqslant 2\}=1-F(2)=1-(1-3e^{-2})=3e^{-2}$,

$P\{1<X\leqslant 2\}=P\{X\leqslant 2\}-P\{X\leqslant 1\}=F(2)-F(1)=2e^{-1}-3e^{-2}=\frac{2e-3}{e^2}$.

37【解析】 由题意知，$E(X)=1$，$E(Y)=2$. 所求的数学期望为：

$E(2X-Y+3)=E(2X)-E(Y)+E(3)=2E(X)-E(Y)+3=2\times1-2+3=3$.

即$E(2X-Y+3)=3$.

38【解析】 该齐次线性方程组的系数矩阵为$\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}$，对其进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&-4&0\\0&0&-4&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

解得：$\begin{cases}x_1=-2x_2+x_4\\ x_3=0\end{cases}$

写出基础解系$(1,0,0,1)^{\mathrm T}$和$(-2,1,0,0)^{\mathrm T}$，所以方程组的通解为：$\boldsymbol{x}^{\mathrm T}=k_1(1,0,0,1)^{\mathrm T}+k_2(-2,1,0,0)^{\mathrm T}$，其中$k_1$和$k_2$为任意实数.

39【解析】 行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&k&0\\0&-1&-1\end{vmatrix}=-k$，所以当$k\neq0$时，矩阵$\boldsymbol{A}$可逆.

下面利用初等行变换求$\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\1&k&0&0&1&0\\0&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&k&0&-1&1&0\\0&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&k&0&-1&1&0\\0&0&-1&-\frac{1}{k}&\frac{1}{k}&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{k}&\frac{1}{k}&0\\0&0&1&\frac{1}{k}&-\frac{1}{k}&-1\end{array}\right)$$

所以，当 $k \neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{1}{k} & -\frac{1}{k} & -1 \end{pmatrix}$.

40【解析】设 k_1，k_2，k_3 是三个实数，令

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_3(\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1) = (k_1 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + (k_2 + k_3)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以只能系数全为 0，可得方程组：$\begin{cases} k_1 + k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases}$

由其系数矩阵的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，可知，该方程组只有零解，即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关，该向量组的秩为 3.