数学核心
公式手册

陈剑 整理

备考规划

一、考研时间节点及笔试科目

1.考研时间节点

时间	内容	注意
7 月中旬	新考纲发布	关注新考纲权威解读
9.24-9.27 9:00-22:00	预报名 研招网 yz.chsi.com.cn	只针对应届生 【应届生也可以不报】
10.10-10.31 9:00-22:00	正式报名 研招网 yz.chsi.com.cn	所有考生报名，选择管理类联考，不要选择全国统考
11.6-11.10	现场确认（主要是照相）	部分院校只需网上确认，关注通知
12.14-考试	下载打印准考证	打印成彩色或黑白都可以，建议多打印几张
12 月下旬周六	笔试： 上午 8:30-11:30 管综 下午 2:00-5:00 英语二	凭身份证和准考证参加考试， 注意安排好时间，迟到 15 分钟取消考试资格，带齐符合要求的文具.
2 月中旬	查成绩	34 所自主划线院校开始划线
3 月上旬	国家线公布	没有自主划线的院校不得低于国家线
3-4 月	复试录取，调剂通道	注意研招网的调剂通道通知
5 月	录取工作结束	祝大家金榜题名，期待 9 月的研究生学习之旅！

2.笔试科目

(1)综合能力

数学不是单独一张卷子，是与逻辑和写作一起考的，答题方式为闭卷、笔试.不允许使用计算器.综合能力试卷结构如下表所示：

科目	数学	逻辑	小作文	大作文	合计

分值	25×3=75 分	30×2=60 分	1×30=30 分	1×35=35 分	200 分
题号	1-15,16-25	26-55	56	57	57 题
题量	15+10=25	30	1(600 字)	1(700 字)	57 题
题型	五选一单选：问题求解，充分判断	五选一单选	主观题	主观题	-
考试时间	65 分钟	50 分钟	25 分钟	35 分钟	175 分钟
单题用时	2 分 40 秒	1 分 50 秒	2.5 秒/字	2.5 秒/字	-
时间弹性	大	中	中	中	-
难度	大	中	中	中	-
拉分差距	大	中	中	中	-

(2)英语二

科目	完形填空	阅读 A	阅读 B	翻译	小作文	大作文	合计
分值	20×0.5=10	20×2=40	5×2=10	1×15	1×10	1×15	100
题号	1-20	21-40	31-45	46	47	48	48 题
题量	20	20	5	1	1	1	48 题
题型	四选一	四选一	四选一	主观题	主观题	主观题	
考试时间	20 分钟	80 分钟	15 分钟	20 分钟	15 分钟	25 分钟	175 分钟

二、数学试卷形式结构及内容大纲

综合能力考试中的数学基础部分主要考查考生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力和数据处理能力，通过问题求解和条件充分性判断两种形式来测试.

试题涉及的数学知识范围有：

（一）算术

1、整数

（1）整数及其运算

（2）整除、公倍数、公约数

（3）奇数、偶数

（4）质数、合数

2、分数、小数、百分数

3、比与比例

4、数轴与绝对值

（二）代数

1、整式

（1）整式及其运算

（2）整式的因式与因式分解

2、分式及其运算

3、函数

（1）集合

（2）一元二次函数及其图像

（3）指数函数、对数函数

4、代数方程

（1）一元一次方程

（2）一元二次方程

（3）二元一次方程组

5、不等式

（1）不等式的性质

（2）均值不等式

（3）不等式求解：一元一次不等式(组)，一元二次不等式，简单绝对值不等式，简单分式不等式.

6、数列、等差数列、等比数列

（三）几何

1、平面图形

（1）三角形

（2）四边形(矩形、平行四边形、梯形)

（3）圆与扇形

2、空间几何体

（1）长方体

（2）柱体

（3）球体

3、平面解析几何

（1）平面直角坐标系

（2）直线方程与圆的方程

（3）两点间距离公式与点到直线的距离公式

（四）数据分析

l、计数原理

（1）加法原理、乘法原理

（2）排列与排列数

（3）组合与组合数

2、数据描述

（1）平均值

（2）方差与标准差

（3）数据的图表表示

直方图，饼图，数表.

3、概率

（1）事件及其简单运算

（2）加法公式

（3）乘法公式

（4）古典概型

（5）伯努利概型

三、考纲权威解读

管理类联考综合能力测试包含了初等数学，基础逻辑和写作三部分，是为高等院校和院所招收工商管理硕士、公共管理硕士、会计硕士等专业学位而设置的具有选拔性质的联考科目.其目的是科学、公平、有效地测试考生是否具备攻读上述专业学位所必需的基本素质、一般能力和培养潜能.主要考察的是考生运用数学基础知识分析与解决问题的能力、逻辑思维能力、综合归纳能力、分析论证能力、汉语理解及书面表达能力.

管理类数学部分主要考察学生利用基本的数学知识解决现实中问题的能力，主要包括问题求解和条件充分性判断分析两种题型，但问题求解和条件充分性判断题型只涉及初等数学基础知识，不同于通常的数学考试，问题求解和条件充分性判断题本质上是以数学的形式为载体测试考生的分析与解决问题的能力.

综合能力考试不对数学知识作系统考察，而只涉及若干必要的数学知识点.很多同学以为以前学过的很多知识都忘了，更多的同学甚至害怕数学，其实这是片面的，只要是有信心，并有行之有效的计划和方法，数学会成为你的优势学科，让你在在研究生考试过程中先人一步，胜人一筹.管理类数学复习具有基础性和长期性的特点，管理类数学知识的学习是一个长期积累的过程，要遵循由浅入深的原则,先将知识基础打牢,构建起知识体系,然后再去追求技巧以及方法, 不要过分追求技巧，没有基础谈技巧是空中楼阁.

四、备考计划

复习备考根据自己的实际情况可长可短，通常要半年左右的时间.基础好、前期准备相对充分的考生可以稍微缩短备考时间，也要 4 个月的全日制复习；基础稍差的考生就要提前了，从 3 月份开始或者更早；更有甚者，想跨专业考好学校的考生要准备一年时间.无论你的情况如何，无论备考时间长短，针对管理类数学的特点和内容，复习可以分为四个阶段，基础，强化，突破和冲刺；各个阶段达到不同的目标要求，使其知识水平和应试能力逐步上升，最终完成学科复习目标.

第一阶段：基础阶段　夯实基础(1-2 个月)

考研管理类数学在很大比例上在考基本概念、基本理论、基本方法的掌握.这些基础性的东西需要在第一阶段充分把握.这一阶段的主要任务是把考研管理类数学的各个考点、知识点系统性的过一遍.以教材为准，掌握“三基”为主.结合考研大纲把考纲中要求的知识

点一字不落的复习一遍.

在这一阶段，以教材为准，结合大纲全面系统的复习，把教材中的每一个大纲要求的知识点、理论和解题方法都不能放过.教材中的典型例题和课后习题要详细认真的动手做一遍；对于教材中的理论证明和考纲不要求的直接跳过，这样复习更有针对性效率也更高.最总通过对教材的整体复习，可以全面掌握“三基”，熟悉考纲，记住必要的概念、公式、定理以及常见的解题方法，为下一阶段的复习做好基础上的铺垫.

在这一阶段还要注意两点.第一点就是注重培养运算能力.运算能力，大纲要求是比较高的，并且考试题目中很多的题目是要通过计算才能解决的.历年来都有考生不是因为不会做失分，而是因为计算错误丢掉的，从而导致失败的结局，这是很令人惋惜的.所以在这一阶段要把教材上的典型例题，计划中规定的课后习题等要一道一道动手去做，每一道题目都不能放过.要求第一遍不看解答自己独立完成，然后再对照解析分析做题时出现的问题，尤其是算错的题目一定要重新计算一遍，不论多么繁琐直到自己能够计算正确为止.只有通过这样的练习才能逐步提高自己的运算能力.第二点就是要多总结，学会时时总结，事事总结，养成总结问题的好习惯.总结可以让我们知道自己的不足，可以让我们不至于犯相同的错误，可以提高效率节省时间.

第二阶段： 强化阶段 训练方法(2-3 个月)

通过基础阶段的复习，考生对大纲要求的基本概念、基本理论和基本方法已经了解并且能够简单串联，熟悉了教材各章节的知识点，知道了考试的重点章节和非重点章节，能够解决相对简单的综合题目.

但是，只有这些对于考研来讲是远远不够的.考研试题都是综合性强，前后联系紧密，甚至学科之间有交叉的题目，比如把排列组合和概率初步结合起来出题.所以，需要通过大量的综合性强的题目的练习，一题多解，一法多用，只有这样才能熟悉各类考试题型，积累各题型的解决方法，才能把所学知识融会贯通、灵活应用，才能更好的应对考试题目.想要考出好的成绩，这一阶段是至关紧要的.

第三阶段：战场演习 真题检测

经过前两个阶段的复习，基础知识和考点知识点都已经熟悉，考试题型，解题思路和解题方法已经掌握，常考题目类型也非常熟悉了,这时候需要通过做真题检验自己的学习效果.一般从九月中旬开始，就要启动真题训练了.

做真题的目的如下：

1、历年的考试题目是出题老师经过缜密思考，结合考试大纲，并充分考虑到各种类型的学生的基础上，同时加以对难度系数、区分度等多个角度的融合之上出来的，是任何模拟题所不能比的；

2、历年的考试题目具有相当的稳定性、连续性、可信性，为新的一年的考试指明了命题的方向，也为复习备考的考生指明了复习的方向.按照这个方向去复习才能把握考试的重点，才能不走弯路，才有可能考出理想的成绩.试想，如果你所复习的内容从来都没有在试题中体现，而试题中常考的你都不会，这样能考好吗？

3、通过我们潜心研究历年试题发现，它不仅为我们指明了复习的方向，更重要的是上面有很多的题型是历年必考的，还有很多是经常考的，还有几年才考一次的，还有大纲虽然规定了但从来没有涉及过考题的，并且，有的题目经过若干年又会重新出现在试卷上，这样就为我们的复习大大提高了效率，找到了一条考高分的捷径.

综合以上几点，我们必须要认真研究历年真题，必须要研究，而不仅仅是做题了.对于历年真题的研究，通常是最近 10 年的真题.要求在这个阶段要按照如下方式进行，反复做 4 遍：

第 1 遍，按照真题的年份顺序从前往后，每 2-3 天做一套题目.第一天花 3 个小时的时间，严格按照考试的要求做题，就把此次当做一次自我的模拟测试，计算题要写出详细的步骤，这样既能锻炼计算能力又能把我解题步骤，可以说是一举两得.第二天花费 3 小时参照答案进行认真的分析和研究，把自己真正作对的题目挑出来，这些题目说明已经掌握就可以不用再费心了.做错的题目要格外的小心，一定要认真分析错误的原因，一点不会，计算错误还是其他原因都要考虑清楚，并且标注题目，记录错误原因，以防再次犯错.错题要当场再做一遍，熟悉一下.

第 2 遍，按照题型的顺序解题，每天几个题型.这样做的目的就是把不同年份的类似题目进行归类，通过把握题目类型去掌握这类题目的特点，总结解题思路和方法，这样就能轻松应对各种题目，提高效率.在做题的同时，一方面要熟悉并记忆不同题型的解题方法，另一方面对于第一遍不会做的题目再做一遍，检验一下自己是否真正掌握此题，对于还没有掌握的题目再次做出标记，分析原因，提炼出来，从而更加了解自己的不足和缺漏.

第 3 遍，重点研究不会的题目和不熟悉的题型的解题方法.通过前两遍的做题已经筛选出了自己不会的，这一遍就重点研究这些问题就够了.把他们研究清楚就是最大的胜利.

第 4 遍，再进行一次梳理.一方面梳理题型的缺漏，另一方面梳理知识点的疏漏，并要归纳考试题目的特点，把握出题的方向和重难点题型，做到心中有数.从而才能真正做到"知己知彼"，这样才能"百战不殆".

这个阶段是考生真正的飞跃期，才从根本上知道了考研管理类数学是怎么一回事，也才从根本上了解了自己，了解考试，可以轻松的应对考试了.

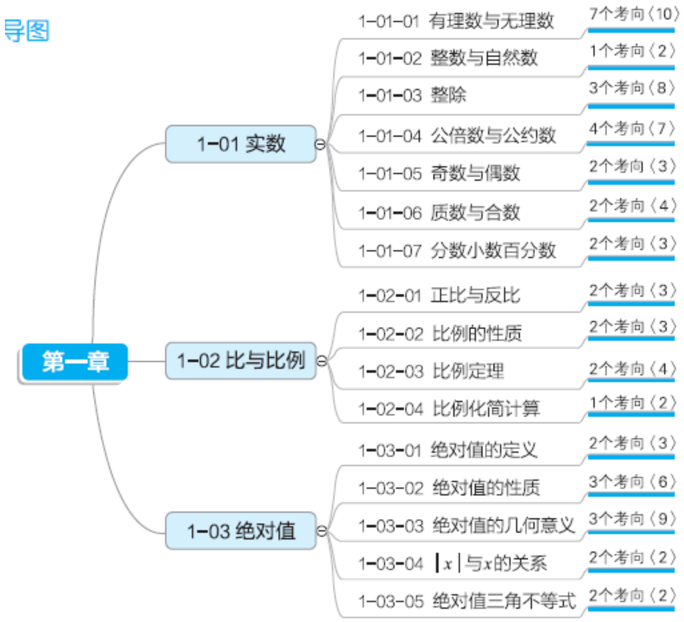
第四阶段　考前冲刺 模考训练

做完真题，进入 11 月份,开始进行全真模拟，每周根据自己的情况，进行 1-2 次的高质量模拟，完全模仿考场情况，严格按照考试要求进行考试和试卷的批改.让考生能够了解考试、适应考试，提升心理素质、查漏补缺，把握考试特点规律，从而全面提高考生应对考试的能力.根据模拟的错误和失分点，再查缺补漏，总结知识点和方法.

综上，在做一个题目时，不要满足于会做，更不要只满足于做对答案，而是需要研究题目考查的是什么知识点，它所代表的题型特点，可能犯的概念性、逻辑性的错误，以及对这类题型用什么方法应对才是最快捷的，并举一反三;要有时间意识，要有扎扎实实的态度，要在点点滴滴的积累中提高自己.要分阶段提高，稳步晋级.

第一章 算术

导图



注：考向后面括号中的数字表示该考向中的例题数.（后同）

一、实数

1.实数分类

包括有理数和无理数.

$$\text{实数}R\begin{cases}\text{有理数}Q\left.\begin{cases}\text{整数}\\\text{分数}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

2.有理数与无理数的本质区别

任何有理数都可以写成$\dfrac{n}{m}(m,n\in Z)$，比如$\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{7},-3=-\dfrac{3}{1},0$，无理数无法表示成分子分母都是整数的分数.

3.常见无理数

$$常见无理数\begin{cases}\pi, e \\ 开不尽的根号，如\sqrt{2} \\ 取不尽的对数，如\log_2^3 \\ 一些三角函数，如\tan\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$$

4.有理数与无理数运算性质

有理数±有理数=有理数，

有理数×有理数=有理数，

有理数÷非零有理数=有理数，

有理数±无理数=无理数，

非零有理数×无理数=无理数，

非零有理数÷无理数=无理数，

无理数±无理数=不确定，

无理数×无理数=不确定，

无理数÷无理数=不确定

5.整数与自然数

(1)自然数 N：0，1，2，…

(2)整数 Z：…，－2，－1，0，1，2，…

$$整数Z\begin{cases}正整数Z^{+} \\ 零 \\ 负整数Z^{-}\end{cases}$$

其中正整数和零称为非负整数.

6.整除，倍数，约数

(1)数的整除

当整数 a 除以非零整数 b，商正好是整数而无余数时，则称 a 能被 b 整除或 b 能整除(A)

(2)常见整除的特点

能被 2 整除的数：个位为 0，2，4，6，8.

能被 3 整除的数：各数位数字之和必能被 3 整除.

能被 4 整除的数：末两位（个位和十位）数字必能被 4 整除.
能被 5 整除的数：个位为 0 或 5.
能被 6 整除的数：同时满足能被 2 和 3 整除的条件.
能被 8 整除的数：末三位（个位、十位和百位）数字必能被 8 整除.
能被 9 整除的数：各数位数字之和必能被 9 整除.
能被 10 整除的数：个位必为 0.

(3)倍数，约数

倍数，约数：当 a 能被 b 整除时，称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数.

公约数和最大公约数：几个数公有的约数，叫做这几个数的公约数；其中最大的一个，叫做这几个数的最大公约数.

公倍数和最小公倍数：几个数公有的倍数，叫做这几个数的公倍数；其中最小的一个，叫做这几个数的最小公倍数.

【评注】如果用 a 和 b 表示两个自然数，那么这两个自然数的最大公约数与最小公倍数关系是：(a，b)×[a，b]=a×(B)其中 (a，b)表示最大公约数，[a，b]表示最小公倍数.

7.互质数

公约数只有 1 的两个数称为互质数，如 4 和 9.

8.非整除

当整数 a 除以非零整数 b，商为整数，但余数 r 不为 0 时，称为非整除.

其形式为： $\underbrace{a}_{被除数} \div \underbrace{b}_{除数} = \underbrace{c}_{商} \cdots \underbrace{r}_{余数}$ ，如 $\underbrace{20}_{被除数} \div \underbrace{3}_{除数} = \underbrace{6}_{商} \cdots \underbrace{2}_{余数}$.

为便于做题，可以写成乘法 $\underbrace{a}_{被除数} = \underbrace{b}_{除数} \times \underbrace{c}_{商} + \underbrace{r}_{余数}$.

【注意】要求余数小于除数. 当余数为 0 时，就变成整除了.

9.质数、合数

(1)质数：

如果一个大于 1 的正整数，只能被 1 和它本身整除，那么这个正整数叫做质数（质数也称素数）. 如 2,3,5……

(2)合数：

一个正整数除了能被 1 和本身整除外，还能被其他的正整数整除，这样的正整数叫做合数. 如 4,6,8,9……

(3)质数与合数有如下重要性质

(a) 质数和合数都在正整数范围，且有无数多个.

(b) 2是唯一的既是质数又是偶数的整数，即是唯一的偶质数.大于2的质数必为奇数.质数中只有一个偶数2，最小的质数为2.

(c) 1既不是质数也不是合数.

10.奇数、偶数

(1)奇数：不能被 2 整除的数，可以表示为 2k+1，k 为整数.
(2)偶数：能被 2 整除的数，可以表示为 2k，k 为整数.
(3)组合性质
奇数±奇数=偶数；奇数±偶数=奇数；偶数±偶数=偶数；
奇数×奇数=奇数；奇数×偶数=偶数；偶数×偶数=偶数.
【注意】0 是属于偶数. 两个相邻整数必为一奇一偶.

11.分数

将单位“1”平均分成若干份，表示这样的一份或几份的数叫做分数.

$$分数\begin{cases}真分数:分子＜分母，如\dfrac{3}{7}\\[2ex]假分数:分子＞分母，如\dfrac{7}{5}\end{cases}$$

12.小数

$$小数\begin{cases}纯小数:整数部分为0的小数，比如0.21\\混小数:整数部分不为0的小数，比如3.21\end{cases}$$

$$小数\begin{cases}有限小数:比如0.21\\无限小数\begin{cases}循环小数\begin{cases}纯循环小数:比如0.\dot{2}\dot{1}\\混循环小数:比如0.3\dot{1}\dot{2}\end{cases}\\不循环小数:比如\sqrt{2}\end{cases}\end{cases}$$

13.小数与分数互化

(1)有限小数化为分数

用 10、100、1000 等做分母，如 $0.21=\dfrac{21}{100}$

(2)纯循环小数化为分数

要用 9、99、999 等这样的数做分母，其中“9”的个数等于一个循环节数字的个数；一个循环节的数字所组成的数，就是这个分数的分子.

公式可表示为：$0.\underbrace{\dot{a}b\cdots\dot{g}}_{循环节位数}=\dfrac{ab\cdots g}{\underbrace{99\cdots9}_{9的个数为循环节位数}}$，如 $0.\dot{2}\dot{1}=\dfrac{21}{99}=\dfrac{7}{33}$.

(3)混循环小数化为分数

分母要用 9 与 0，其中“9”的个数等于一个循环节数字的个数，“0”的个数等于不循环的数字个数；分子是一个循环节的数字所组成的数，再减去不循环的数字.

公式可表示为：$0.\underbrace{ab\cdots c}_{m}\underbrace{\dot{d}\cdots\dot{g}}_{n}=\dfrac{ab\cdots g-ab\cdots c}{\underbrace{99\cdots9}_{n}\underbrace{00\cdots0}_{m}}$，其中 m 代表小数点后不循环的位数，

n 代表循环节的位数. 比如 $0.3\dot{1}\dot{2}=\frac{312-3}{990}=\frac{309}{990}=\frac{103}{330}$.

14.百分数

表示一个数是另一个数的百分之几的数叫做百分数，通常用“%”来表示.

二、比和比例

1.比

两个数相除，又称为这两个数的比.即 $a:b=\frac{a}{b}$.其中 a 叫做比的前项，b 叫做比的后项.相除所得商叫做比值.记作 $a:b=\frac{a}{b}=k$，在实际应用中，常将比值表示成百分数，称为百分比.

2.比例

相等的比称为比例，记作 a:b=c:d，或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.其中 a 和 d 称为比例外项，b 和 c 称为比例内项.当 a:b=b:d 时，称 b 为 a 和 d 的比例中项，显然当 a、b、d 均为正数时，b 是 a 和 d 的几何平均值.

3．正比

若 y=kx(k 不为零)，则称 y 与 x 成正比，k 称为比例系数.

【注意】并不是 x 和 y 同时增大或减小才称为正比.比如当 k<0 时，x 增大时，y 反而减小.

4．反比

若 y=k/x(k 不为零)，则称 y 与 x 成反比，k 称为比例系数.

5．比例的基本性质

（1）$a:b=c:d\Leftrightarrow ad=bc$

（2）$a:b=c:d\Leftrightarrow b:a=d:c\Leftrightarrow b:d=a:c\Leftrightarrow d:b=c:a$

6．重要定理

（1）合比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

（2）分比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

（3）合分比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

（4）等比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}(b+d+f\neq 0)$$

三、绝对值

1.定义

正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它相反数；零的绝对值还是零.

2.数学描述

实数 a 的绝对值定义为：$|a|=\begin{cases}a & （a\geq 0） \\ -a & (a<0)\end{cases}$

其几何意义是一个实数a在数轴上所对应的点,到原点的距离值.

3.基本不等式

适合不等式$|x|<a(a>0)$的所有实数所对应的就是全部与原点距离小于a的点，
即：$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$，$(a>0)$。同理可得：$|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a(a>0)$.

4.绝对值的性质

（1）对称性：|-a|=|a|，即互为相反数的两个数的绝对值相等.

（2）等价性：$\sqrt{a^2}=|a|$，$|a|^2=a^2 \quad (a\in R)$

（3）自比性：$-|a|\leq a\leq|a|$,推而广之,$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0 \\ -1 & x<0\end{cases}$

（4）非负性：即|a|≥0，任何实数 a 的绝对值非负.

知识扩展，推而广之，具有非负性的数还有：

偶数次方（根式），如$a^2,a^4,\ldots,\sqrt{a},\sqrt[4]{a},\ldots$

▲考点规则：若干个具有非负性质的数之和等于零时，则每个非负数应该为零；有限个非

负数之和仍为非负数.

5.|x|与 x 的大小关系

若$\|x\|=x$，则$x\geq 0$.	若$\|x\|=-x$，则$x\leq 0$.
若$\|x\|>x$，则$x<0$.	若$\|x\|>-x$，则$x>0$.
若$\|x\|<x$，则$x\in\phi$.	若$\|x\|<-x$，则$x\in\phi$.
若$\|x\|\geq x$，则$x\in R$.	若$\|x\|\geq -x$，则$x\in R$.
若$\|x\|\leq x$，则$x\geq 0$.	若$\|x\|\leq -x$，则$x\leq 0$.

6.三角不等式

(1)基本形式：$\left||a|-|b|\right|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

(2)等号成立条件

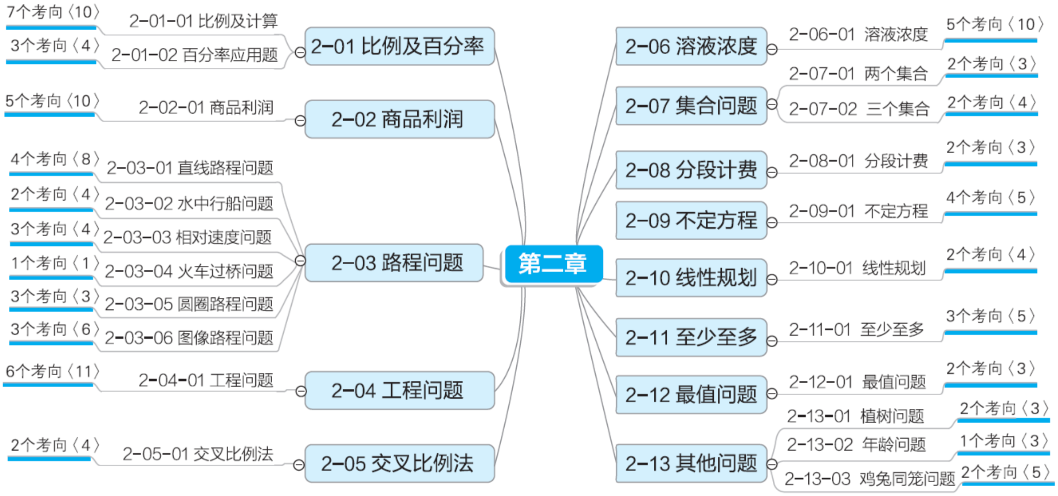
表达式	成立条件	示例
$\|a\|+\|b\|=\|a+b\|$	$ab\geq 0$	$\|-3\|+\|-5\|=\|-3-5\|$
$\|a\|+\|b\|=\|a-b\|$	$ab\leq 0$	$\|3\|+\|-5\|=\|3+5\|$
$\left\|\|a\|-\|b\|\right\|=\|a+b\|$	$ab\leq 0$	$\left\|\|-5\|-\|3\|\right\|=\|-5+3\|$
$\left\|\|a\|-\|b\|\right\|=\|a-b\|$	$ab\geq 0$	$\left\|\|-5\|-\|-3\|\right\|=\|-5+3\|$

(3)大小成立条件

表达式	成立条件	示例
$\|a\|+\|b\|>\|a+b\|$	$ab<0$	$\|-3\|+\|5\|>\|-3+5\|$
$\|a\|+\|b\|>\|a-b\|$	$ab>0$	$\|-3\|+\|-5\|>\|-3+5\|$
$\left\|\|a\|-\|b\|\right\|<\|a+b\|$	$ab>0$	$\left\|\|-5\|-\|-3\|\right\|<\|-5-3\|$

$\left\|\left\|a\right\|-\left\|b\right\|\right\|<\left\|a-b\right\|$	$ab<0$	$\left\|\left\|-5\right\|-\left\|3\right\|\right\|<\left\|-5-3\right\|$

第二章 应用题



一、比例问题

比例问题为应用题中常考题型，比例问题支撑着应用题其他问题的技巧使用，解题常涉及比例性质的应用，如等比定理、合比定理等.

1. 变化率$=\dfrac{\text{变化量}}{\text{变前量}}\times100\%=\dfrac{|\text{现值}-\text{原值}|}{\text{原值}}\times100\%=\left|\dfrac{\text{现值}}{\text{原值}}-1\right|\times100\%$

【注意】变化率包括增长率和下降率两个，所以上式用绝对值表示.

2.增长率 $p\%\xrightarrow{\text{原值}a}$ 现值 $a(1+p\%)$；

下降率 $p\%\xrightarrow{\text{原值}a}$ 现值 $a(1-p\%)$

【注意】一件商品先提价 $p\%$ 再降价 $p\%$，或者先降价 $p\%$ 再提价 $p\%$，回不到原价，应该比原价小，因为：$a(1+p\%)(1-p\%)=a(1-p\%)(1+p\%)<a$.

3.恢复原值

原值先降 $p\%$，再增 $\dfrac{p\%}{1-p\%}$ 才能恢复原值；或者先增 $p\%$ 再降 $\dfrac{p\%}{1+p\%}$ 才能恢复原值.

4.甲比乙大 $p\%\Leftrightarrow\dfrac{\text{甲}-\text{乙}}{\text{乙}}=p\%\Leftrightarrow$ 甲=乙$(1+p\%)$；甲是乙的 $p\%\Leftrightarrow$ 甲=乙$\cdot p\%$

【注意】甲比乙大 $p\%$ $\neq$乙比甲小$p\%$（因为基准量不同），甲比乙大 $p\% \Leftrightarrow$乙比甲小$\dfrac{p\%}{1+p\%}$.

5.比例性质：如果$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，则$ad=bc$.

6.等比定理：$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{a+c+e}{b+d+f}\ (b+d+f\neq 0)$

7.$总量=\dfrac{部分量}{对应占的比例}$

【注意】找对基准量，明确比例关系.尤其一个题目中出现多个百分比，每个基准量都不一样.

二、利润问题

商品问题整体命题难度不大，但公式较多，命题较为灵活，关键点在于基准量的把握.

1.利润=售价-进价；

2.$利润率=\dfrac{利润}{进价}\times 100\%=\dfrac{售价-进价}{进价}\times 100\%=\left(\dfrac{售价}{进价}-1\right)\times 100\%$

3.$利润=利润率\times 进货价$

4.$售价=进价\times\left(1+利润率\right)=进价+利润$

【评注】首先要明确利润、售价、进价(成本)、销量的关系；其次在一个题目中出现多个百分比，要弄清楚每个百分比对应的基准量 ；然后在计算百分比时，可假设基准量为 100 来简化运算.

三、路程问题

路程问题是联考常考题型，题型难度属于中等偏上，以直线型和圆圈型两大类型为主线，以相遇与追及为模板.

1.路程 s、速度 v、时间 t 之间的关系：

$s=vt,t=\frac{s}{v},v=\frac{s}{t}$

2.对于直线型的路程问题：

(1)相遇

$$s_{相遇}=s_1+s_2=v_1t+v_2t=\left(v_1+v_2\right)t$$

(2)追赶

$$s_{追及}=s_1-s_2=v_1t-v_2t=\left(v_1-v_2\right)t$$

3.对于圆圈型的路程问题：（从同一起点同时出发，周长为 s，相遇一次时间为 t）

反向运动：$s=s_1+s_2=v_1t+v_2t=\left(v_1+v_2\right)t$；

同向运动：$s=s_1-s_2=v_1t-v_2t=\left(v_1-v_2\right)t$.

4.顺水、逆水问题：

$v_{顺水}=v_{船}+v_{水}$；$v_{逆水}=v_{船}-v_{水}$

5.相对速度（两个物体运动时，可将一个作为参照物，看成相对静止的）

同向运动：$v_{同向}=v_1-v_2$；相向运动：$v_{相向}=v_1+v_2$

【评注】路程问题主要涉及路程、时间、速度三者的关系，一般以时间或路程为等量关系来列方程.路程又分为直线型、圆圈型、顺水逆水、相对速度等题型.此外，路程问题可延伸至工程问题：路程可以看做工作量，时间可以看做工作时间，速度可以看做工作效率.

四、工程问题

工程问题为常考题型，命题频率相对较高，题型难度属于中等，核心在于效率的有关计算.

1.工作量 s、工作效率 v、工作时间 t 三者的关系：

工作量=工作效率×工作时间$(s=vt)$；工作时间=$\frac{工作量}{工作效率}(t=\frac{s}{v})$；

工作效率=$\dfrac{\text{工作量}}{\text{工作时间}}(v=\dfrac{s}{t})$

2.重要说明

工作量：对于一个题，工作量往往是一定的，可以将总的工作量看做“1”.

工作效率：合作时，总的效率等于各效率的代数和.

3.重要结论

若甲单独完成需要 m 天，乙单独完成需要 n 天；则：

(1)甲的效率为$\dfrac{1}{m}$,乙的效率为$\dfrac{1}{n}$；

(2)甲乙合作的效率为$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$；

(3)甲乙合作完成需要的时间为$\dfrac{1}{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{mn}{m+n}$.

【注意】上述公式也可以推广到多个，此处不再一一列举.

【评注】工程问题主要抓住工作量、工作效率和工作时间三者的关系，在求解时，可以将总工程量看做 1 进行分析.在工作量相同时，工作效率与工作时间成反比；工作效率固定时，工作量与工作时间成正比；工作时间相同时，工作量与工作效率成正比.

五、交叉法

当出现一个整体分为两部分时，可以采用交叉比例法. 交叉法是应用题中一类技巧方法，运用巧妙关键在于，应用时机的把握以及最后的比值确定.

当一个整体按照某个标准分为两部分时，可以根据杠杆原理得到交叉法，快速求出两部分的数量比.另外，交叉法的应用不局限于平均值问题，只要涉及一个大量，一个小量以及它们混合后的中间量，一般都可以利用交叉法算出大量与小量的比例.

六、浓度问题

浓度问题命题灵活多样，公式使用为根基，在处理问题时往往以浓度计算公式为核心，同时会涉及比例问题的解题技巧以及交叉法的使用.

1. 基本公式

溶液=溶质+溶剂，

$$浓度=\frac{溶质}{溶液}\times 100\%=\frac{溶质}{溶质+溶剂}\times 100\%;$$

$$溶质=溶液\times 浓度$$

$$溶剂=溶液\times(1-浓度)$$

2.重要等量关系

(1)浓度不变准则：将溶液分成若干份，每份的浓度相等，都等于原来溶液的浓度；将溶液倒掉一部分后，剩余溶液的浓度与原溶液的浓度相等.

(2)物质守恒准则：物质(无论是溶质、溶剂，还是溶液)不会增多也不会减少，前后都是守恒的.

3.重要命题思路

(1)“稀释”问题：特点是加溶剂，溶质不变，以溶质为基准进行求解.

(2)“浓缩”问题：也称“蒸发”问题，特点是减少溶剂，溶质不变，以溶质为基准进行求解.

(3)“加浓”问题：特点是增加溶质，溶剂不变，以溶剂为基准进行求解.

(4)“混合”问题：用两种或多种溶液混合在一起，采用溶质或溶剂质量守恒分析，也可利用杠杆原理分析.

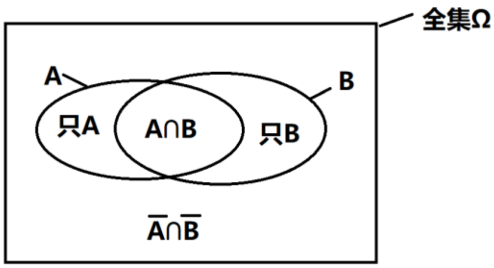
(5)“置换”问题：一般是用溶剂等量置换溶液，可以记住结论，原来溶液 v 升，倒出 m 升，再补等量的溶剂(水)，则浓度为原来的 $\frac{v-m}{v}$.

七、集合问题

集合问题问题属于联考常规题目，主要涉及两个集合和三个集合的问题，难度系数不大,关键需要掌握各区域的含义及数量关系.

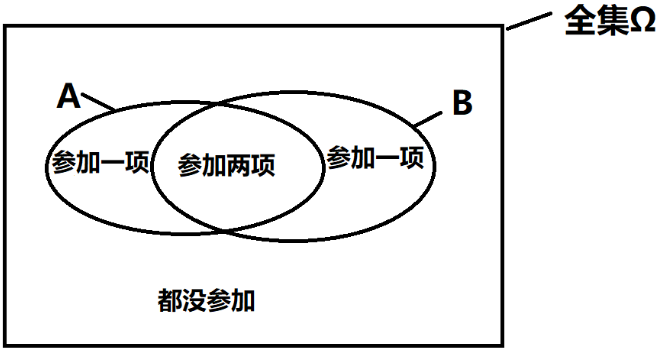
1.两个集合

(1)按宏观区域分



公式：$A\cup B=A+B-A\cap B=\Omega-\overline{A}\cap\overline{B}$；

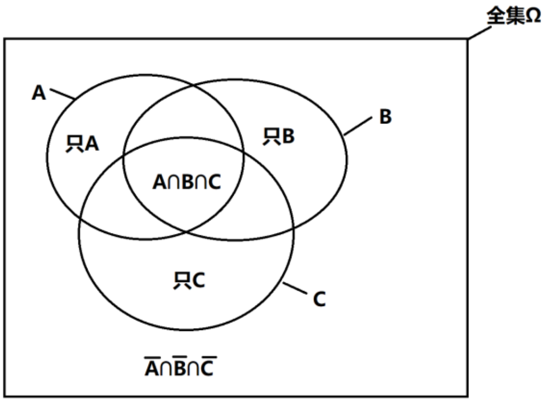
(2)**按参加数量分**



公式：全集=参加一项+参加两项+都没参加

2.三个集合

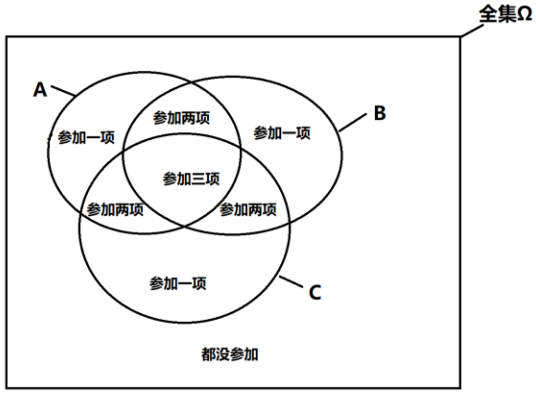
(1)按宏观区域分



公式：$A\cup B\cup C=A+B+C-(A\cap B+B\cap C+A\cap C)+A\cap B\cap C$.

$$A\cup B\cup C=\Omega-\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$$

(2)按参加数量



公式：全集=参加一项+参加两项+参加三项+都没参加

$$A\cup B\cup C=\text{参加一项}+\text{参加两项}+\text{参加三项}$$

$$A+B+C=\text{参加一项}+\text{参加两项}\times 2+\text{参加三项}\times 3$$

$$A\cup B+B\cup C+A\cup C=\text{参加两项}+\text{参加三项}\times 3$$

【评注】区分 $A\cup B\cup C$ 及 A+B+C，其中 $A\cup B\cup C$ 不能出现重复的人，A+B+C 会出现重复的人. 此外注意，$A\cap B$ 表示两块区域，只参加 AB 的和三个都参加的人数.

集合问题问题属于联考常规题目，主要涉及两个集合和三个集合的问题，难度系数不大关键需要知道将两种模型与文氏图的联系.

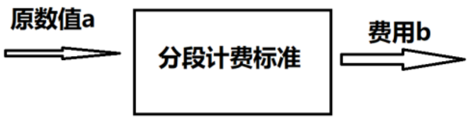
八、分段计费问题

分段计费问题属于联考常规题目，难度系数不大，但耗时时间较长，关键点在于找到题目计费标准，以及计费部分.

1.适用情况

分段计费是指不同范围对应不同计费方式，这类问题属于联考常规题目，难度系数不大，但耗时时间较长，关键点在于找到题目计费标准，以及计费部分. 生活中常用的比如：水费、电费、打车费、快递费、个税等.

2.求解过程



第三章 整式分式

一、因式

1.整式的除法

整式 $F(x)$ 除以整式 $f(x)$ 的商式为 $g(x)$，余式为 $r(x)$，则有 $F(x)=f(x)g(x)+r(x)$，并且 $r(x)$ 的次数要小于 $f(x)$ 的次数.

当 $r(x)=0$ 时，$F(x)=f(x)g(x)$，此时称 $F(x)$ 能被 $f(x)$ 整除，记做 $f(x)\mid F(x)$.

2.因式定理

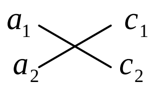
$(x-a)\mid f(x)\Leftrightarrow f(x)$含有$(x-a)$因式$\Leftrightarrow f(x)$能被$(x-a)$整除$\Leftrightarrow f(a)=0$.

3.十字相乘法

用于分解 ax^2+bx+c 型的式子，这类二次三项式的特点是：二次项的系数、常数项是两个数的积；一次项系数是二次项系数的因数与常数项系数的因数乘积的和.特殊情况时，二次项的系数为 1.其过程如图所示：对于 ax^2+bx+c

条件：（1）$a=a_1a_2$

（2）$c=c_1c_2$



（3）$b=a_1c_2+a_2c_1$ $\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ $b=a_1c_2+a_2c_1$

分解结果：$ax^2+bx+c=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$

二、常用公式

1. 平方差公式：$a^2-b^2=\left(a+b\right)\left(a-b\right)$

2. 完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$；

3. $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

4.立方和公式：$a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$

5.立方差公式：$a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$

三、一元二次函数

$$y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

1.开口方向：由 a 决定，当 a>(<)0 时，开口向上(下).

2.对称轴：以 $x=-\frac{b}{2a}$ 为对称轴.

3.顶点坐标：$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$.

4.y 轴截距：y=c.

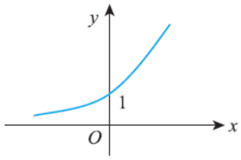
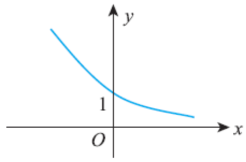
5.最值：当 a>(<)0 时，有最小(大)值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，无最大(小)值.

四、指数

1.指数图像

$y=a^x(a>0,a\neq 1)$,其定义域为（-∞,+∞）.

当 $0<a<1$ 时,函数严格单调递减.当 $a>1$ 时,函数严格单调递增.且图形恒过点（0,1）.

	$a>1$	$0<a<1$
图像		
性质	（1）定义域：**R**	
	（2）值域：$(0，+\infty)$，即图像在 x 轴上方	
	（3）过点$(0，1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$	
	（4）当 $a>1$ 时$\begin{cases}x>0，a^x>1\\x<0，0<a^x<1\end{cases}$	当 $0<a<1$ 时$\begin{cases}x<0，a^x>1\\x>0，0<a^x<1\end{cases}$
	（5）在 **R** 上是增函数	（5）在 **R** 上是减函数

2. 指数的运算公式

$(1)\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(2)\ a^m \div a^n = a^{m-n}$

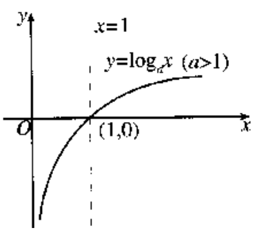
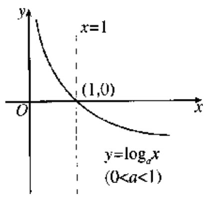
$(3)\ (a^m)^n = a^{mn}$

$(4)\ a^0 = 1, a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$

五、对数

1.对数图像

$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$,其定义域为（0,+∞）,它与 $y=a^x$ 互为反函数.对数函数的图形过点（1,0）.

	a>1	0＜a＜1
图像		
性	（1）定义域：（0，+∞），即图像在 y 轴右侧	

质	（2）值域：**R**	
	（3）过点（1，0），即 x＝1 时，y＝0	
	（4）在（0，+∞）上是增函数	（4）在（0，+∞）上是减函数

2.对数的运算公式

(1)同底对数

$\log_a^m+\log_a^n=\log_a^{mn}$； $\log_a^m-\log_a^n=\log_a^{m/n}$

(2)幂运算

$\log_{a^m}^{b^n}=\frac{n}{m}\log_a^b$；

尤其 $m=1$ 时，$\log_a^{b^n}=n\log_a^b$；尤其 $m=n$ 时，$\log_{a^n}^{b^n}=\log_a^b$

(3)换底公式

$\log_a^b=\frac{\log_c^b}{\log_c^a}$（换底公式），一般 c 取10或 e.

【注意】特别地，以 10 为底的对数叫常用对数，记作 $\log_{10}{}^N$,简记为 lgN；以无理数 e (e=2.71828…)为底的对数叫做自然对数，记作 $\log_e{}^N$，简记为 lnN.

六、集合

1.集合中元素的特性

(1)确定性：

按照明确的判断标准给定一个元素或者在这个集合里或者不在，不能模棱两可.

(2)互异性：

集合中的元素没有重复.

(3)无序性：

集合中的元素没有一定的顺序（通常用正常的顺序写出）

2.常用结论

(1)任何一个集合是它本身的子集，记为$A\subseteq A$；

(2)空集是任何集合的子集，记为$\phi\subseteq A$；空集是任何非空集合的真子集；

(3)n 个元素的子集有2^n个；n 个元素的真子集有2^n-1个；

n 个元素的非空子集有2^n-1个；n 个元素的非空真子集有2^n-2个.

第四章 方程与不等式

一、一元二次方程根的情况

其一般形式为：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

令$\Delta=b^2-4ac$，此方程的解将依Δ值的不同分为如下三种情况：

I. 当$\Delta>0$时，方程有两个不等实根，根的表达式为：$x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

II. 当$\Delta=0$时，方程有两个相等实根$x_1,x_2=-\dfrac{b}{2a}$

III. 当$\Delta<0$时，方程无实根。

二、根与系数的关系(韦达定理)

x_1, x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$的两个根，则

x_1，x_2是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根 $\rightleftarrows$ $x_1+x_2=-b/a$，$x_1\cdot x_2=c/a$

※韦达定理的扩展及其应用※【利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值】

（1）$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$

（2）$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$

（3）$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

（4）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

（5）$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$

（6）$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_1^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$

四、两根的符号情况

方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$根的情况有以下几种：

⑴ 方程有两个正根$\begin{cases}x_1+x_2>0\\x_1x_2>0\\\Delta\geq0\end{cases}$，

(2）有两个负根$\begin{cases}x_1+x_2<0\\x_1x_2>0\\\Delta\geq0\end{cases}$，可简化为 a、b、c 同号且$\Delta\geq0$

⑶ 一正一负根$\begin{cases}x_1\cdot x_2<0\\\Delta>0\end{cases}$，可简化为 a、c 异号即可.

若再要求$|$正根$|>|$负根$|$，有$\begin{cases}x_1+x_2>0\\x_1x_2<0\\\Delta>0\end{cases}$

五、不等式的定义

用“＞”、“＜”、“≠”、“≥”及“≤”等不等号把代数式连接起来，表示不等关系的式子.

a-b>0 ⇔ a>b, a-b=0 ⇔ a=b, a-b<0 ⇔ a<b.

六、不等式的分类

1.矛盾不等式

不等式只是表示了某种不等关系，它表示的关系可能在任何条件下都不成立，这样的不等式叫矛盾不等式；如 2＞3，$x^2 < 0$

2.绝对不等式

它表示的关系可能在任何条件下都成立，这样的不等式叫绝对不等式；

3.条件不等式

在一定条件下才能成立的不等式叫条件不等式.

七、不等式的基本性质：（注意等价关系）

1.传递性

$a > b, b > c \Rightarrow a > c$；

2.同向相加性

$\left.\begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c > b + d$；

3.同向皆正相乘性

$\left.\begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac > bd$；

4.皆正倒数性

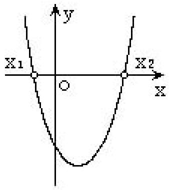
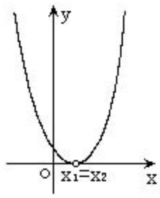
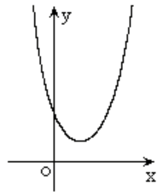
$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0$；

5.皆正乘（开）方性

$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 \qquad (n \in Z^+)$

八、抛物线、方程、不等式的关系

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ （$a>0$）的图象	$y=ax^2+bx+c$ 	$y=ax^2+bx+c$ 	$y=ax^2+bx+c$ 
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\|x<x_1或x>x_2\}$	$\left\{x\middle\|x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

九、平均值

1．算术平均值

设 n 个数 $x_1,x_2,\ldots\ldots$，x_n，称 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值，简记为

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$

2．几何平均值

设 n 个正数 $x_1,x_2,\ldots\ldots$，x_n,称$x_g=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots\ldots x_n}$ 为这 n 个正数的几何平均值，简记为

$$x_g=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}x_i}.$$

【注意】几何平均值是对于正数而言.

3．均值不等式

当 $x_1, x_2, \ldots\ldots$，x_n 为 n 个正数时，它们的算术平均值不小于它们的几何平均值，即

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \quad (x_i>0，i=1,\ldots，n)$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n$ 时，等号成立.

十、常用结论

1.任意实数成立

（1）若 $a,b \in R$，则 $a^2 + b^2 \geq 2ab$

(2)若 $a,b \in R$，则 $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$（当且仅当 $a = b$ 时取“=”）

2. 正实数成立

(1)若 $a,b \in R^*$，则 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(2)若 $a,b \in R^*$，则 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a = b$ 时取“=”）

(3)若 $a,b \in R^*$，则 $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (当且仅当 $a = b$ 时取“=”）

3.倒数情况

(1)若 $x > 0$，则 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (当且仅当 $x = 1$ 时取“=”）;若 $x < 0$，则 $x + \frac{1}{x} \leq -2$ (当且仅当 $x = -1$ 时取“=”）

(2)若 $x \neq 0$，则 $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2即x + \frac{1}{x} \geq 2或x + \frac{1}{x} \leq -2$ (当且仅当 $a = b$ 时取“=”）

(3)若 $ab > 0$，则 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (当且仅当 $a = b$ 时取“=”）

若 $ab \neq 0$，则 $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2即\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2或\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$ (当且仅当 $a = b$ 时取“=”）

4.和与平方和

若 $a,b \in R$，则 $(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$（当且仅当 $a = b$ 时取“=”）

六、做题应用及易错点

1.最值口诀

当两个正数的积为定植时，可以求它们的和的最小值，

当两个正数的和为定植时，可以求它们的积的最小值，

正所谓“积定和最小，和定积最大”.

2.最值条件

求最值的条件“一正，二定，三等”.

先验证给定函数是否满足最值三条件：（1）各项均为正，（2）乘积（或者和）为定值，（3）等号能否取到；然后利用平均值公式求出最值.

3.应用

均值定理在求最值、比较大小、求变量的取值范围、证明不等式、解决实际问题方面有广泛的应用.

第五章 数列

一、基本定义

1．数列的定义

按一定次序排列的一列数.

一般形式：$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$，简记为$\{a_n\}$

【注意】它可以理解为以正整数集（或它的有限子集）为定义域的函数.运用函数的观念分析和解决有关数列问题，是一条基本思路.递推是数列特有的表示法，它更能反映数列的特征.

2．通项公式

$a_n = f(n)$（第 n 项a_n与项数 n 之间的函数关系）.

并非每一个数列都可以写出通项公式；有些数列的通项公式也并非唯一的.

3．数列前 n 项和

记为$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$.

4．数列的分类

①按项分类

有穷数列：项数有限；无穷数列：项数无限.

②按a_n的增减性分类

递增数列（$a_n > a_{n-1}$）；递减数列($a_n < a_{n-1}$)；摆动数列（例：—1，1，—1，1…）；常数数

列（例：6，6，6，…）；有界数列；无界数列.

5．递推公式

a_n与其前后项之间的关系式称为递推公式.

若已知数列的递推关系式及首项，可以写出其他项，因此递推公式是确定数列一种重要方式.

二、a_n与S_n的关系

1. 已知a_n，求S_n.

公式：$S_n = a_1 + a_2 + \Lambda + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

【技巧】采用对通项裂项，进而采用相消求和法.这是分解与组合思想在数列求和中的具体应用. 裂项法的实质是将数列中的每项（通项）分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的. 通项分解*（裂项）*如：

（1）$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

(2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(3) $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

（4）$a_n = n \cdot n! = (n+1-1)n! = (n+1)! - n!$

2. 已知S_n，求a_n

$$a_n = \begin{cases} a_1 = S_1 & \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

三、等差数列

1．定义

如果在数列$\{a_n\}$中,$a_{n+1} - a_n = d$(常数)$(n \in N)$,则称数列$\{a_n\}$为等差数列，d为公差.

2．通项公式

(1)基本公式

$a_n = a_1 + (n-1)d$

(2)扩展公式

$a_n = a_k + (n-k)d$

(3)函数特征

当公差 d 不为零时，可将其抽象成关于 n 的一次函数 $f(n) = dn + (a_1 - d)$，

其斜率为一次项系数 d，一次函数各项系数之和为首项，在 y 轴上的截距为$(a_1 - d)$.

如: $a_n = 3n - 5$.可知有些通项公式的数列是一个等差数列，且公差是 3，首项为-2.

3．前 n 项和公式（重点）

(1)基本公式

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

【评注】本公式用于已知首末项和项数时的求和.

(2)扩展公式

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

【评注】本公式用于已知首项、公差和项数时的求和.

(3)函数特征

$$S_n = (\frac{d}{2})n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

当公差 d 不为 0 时，可将其抽象成关于 n 的二次函数 $f(n) = (\frac{d}{2})n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$，

▲其特点：①常数项为零，过零点；

②开口方向由 d 的符号决定；

③二次项系数为半公差$(\frac{d}{2})$；

④对称轴 $x=\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}$ （求最值）;

⑤若 d 不为零，等差数列的前 n 项和只能为二次函数；若 d 等于零，则退化成一次函数.二次函数各项系数之和是首项.

【评注】等差数列的前 n 项和的解析表达式是不含常数项的二次函数.如 $S_n=3n^2-5n$，可以肯定，S_n 是等差数列的前 n 项之和的表达式，这一等差数列的公差是 6，首项是 –2.

【注意】如果 S_n 是一个含有常数项的二次函数，则常数项被加在首项，其余各项不变，所以从第二项以后的各项仍然构成等差数列，其特点仍符合上述规律.

如：$S_n=2n^2-3n+4$，$a_1=S_1=3$，以后的各项仍为等差数列，公差为 4，

即$S_n=2n^2-3n+4$所形成的数列为:3,3,7,11,15,19,L

(4)公式

若 $S_n=an^2+bn+c$，则

$$a_n=\begin{cases}a_1=S_1=a+b+c & n=1\\ 2an+b-a & n\ge 2\end{cases}$$

当 c 为 0 时，是等差数列，此时可以合写为 $a_n=2an+b-a$.

5．等差数列的性质

（1）元素性质

若 m,n,l,$k\in Z^+$，m+n=l+k, 则 $a_m+a_n=a_l+a_k$.

【注意】可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是脚码之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等.如：

$a_2+a_8+a_{12}=a_4+a_7+a_{11}\ne a_6+a_{16}$（因为项数不同）

(2)求公差 $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

(3) 若S_n为等差数列前n项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$,… 仍为等差数列,其公差为n^2d .

四、等比数列

1．定义

如果在数列$\{a_n\}$中,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(常数)$(n\in N)$,则称数列$\{a_n\}$为等比数列，q 为公比.

2.通项

(1)基本公式

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

(2)扩展公式

$$a_n=a_kq^{n-k}$$

【注意】等比数列中任何一个元素不能为 0，公比也不能为 0.

3．前 n 项和公式

$$S_n=\begin{cases} na_1(q=1) \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq 0且q\neq 1) \end{cases}$$

【注意】$q\neq 1$时，$\frac{S_n}{S_m}=\frac{1-q^n}{1-q^m}$.

4.所有项和 S

(1)条件

只有对于无穷递缩等比数列（$|q|<1,q\neq 0$），才存在所有项和.

(2)公式

所有项和$S=\frac{a_1}{1-q}$.

【理解】当$n\to\infty$时，$q^n\to 0$,所以$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\to S=\frac{a_1}{1-q}$.

【注意】等差数列不存在所有项和.

5.等比数列的性质

(1) $a_n = a_m \cdot q^{(n-m)}$， $q^{n-m} = \dfrac{a_n}{a_m}$.

(2)若 m,n,l,$k \in Z^+$， m+n=l+k,则 $a_m \cdot a_n = a_l \cdot a_k$.

(3) 若S_n为等比数列前n项和，则S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$,L 仍为等比数列,其公比为q^n.

五、数列对照表

数列	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1}-a_n=d$	$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq0)$
通项	$a_n=a_1+(n-1)d=a_m+(n-m)d$	$a_n=a_1q^{n-1}=a_mq^{n-m}$
前 n 项和	$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{1}{2}n(n-1)d$ $=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$	当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$ 当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$
性质	(1) 若 $m+n=k+t$，则 $a_m+a_n=a_k+a_t$ (2) a,b,c 成等差数列$\Leftrightarrow 2b=a+c$(称 b 为 a 和 c 的等差中项) (3) $\{a_n\}$中等距的三项也成等差数列 (4) $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$，仍为等差数列	(1) 若 $m+n=k+t$，则 $a_m\cdot a_n=a_k\cdot a_t$ (2) a,b,c 成等比数列$\Leftrightarrow b^2=ac$(称 b 为 a 和 c 的等比中项) (3) $\{a_n\}$中等距的三项也成等比数列 (4) $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$，仍为等比数列
特殊	非零的常数列既为等差数列($d=0$)，也为等比数列($q=1$).	

六、递推公式的常用思路

(1)列举法

一般通过递推公式找到前几个元素数值的规律，来判断后面元素的数值. 先列举前面若干项，寻找规律，一般是周期循环的规律.

(2)累加法

写出若干项，然后将各项相加.

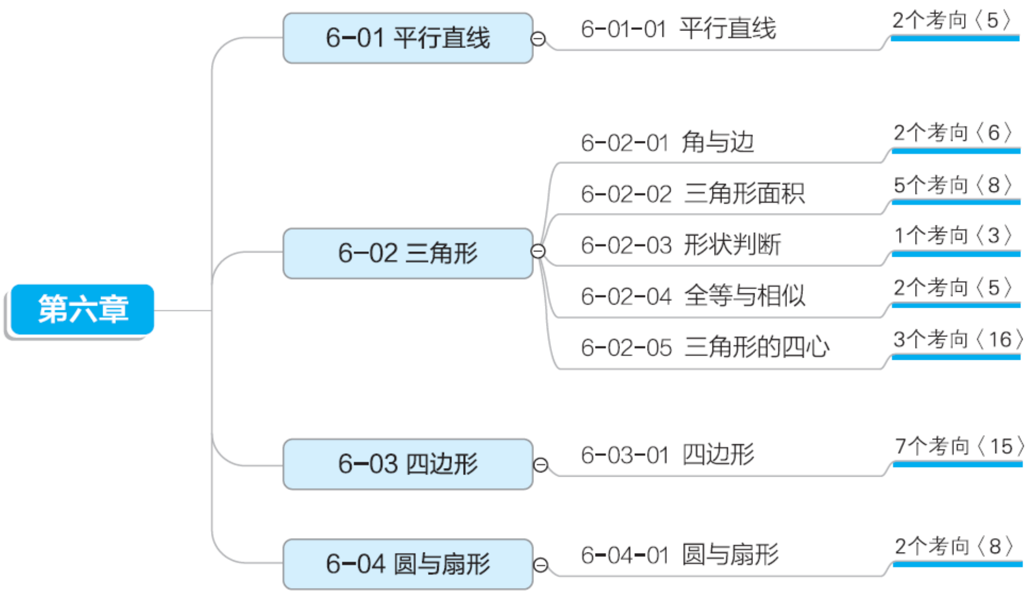
(3)累乘法

写出若干项，然后将各项相乘.

(4)构造数列

将某部分看成一个新数列，新数列是符合等差或等比数列，求出新数列后，再求原数列.

第六章 平面几何



一、角的概念

1.角的定义

有公共端点的两条射线组成的图形叫做角，这个公共端点叫做角的顶点，这两条射线叫做角的边.

当角的两边在一条直线上时，组成的角叫做平角.

平角的一半叫做直角；小于直角的角叫做锐角；大于直角且小于平角的角叫做钝角.

如果两个角的和是一个直角，那么这两个角叫做互为余角，其中一个角叫做另一个角的余角.

如果两个角的和是一个平角，那么这两个角叫做互为补角，其中一个角叫做另一个角的补角.

2.角的表示

角可以用大写英文字母、阿拉伯数字或小写的希腊字母表示，具体的有一下四种表示方法：

①用数字表示单独的角，如$\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$等.

②用小写的希腊字母表示单独的一个角，如∠α，∠β，∠γ，∠θ 等.

③用一个大写英文字母表示一个独立（在一个顶点处只有一个角）的角，如∠B，∠C 等.

④用三个大写英文字母表示任一个角，如∠BAD，∠BAE，∠CAE 等.

【注意】用三个大写英文字母表示角时，一定要把顶点字母写在中间，边上的字母写在两侧.

3.角的平分线及其性质

一条射线把一个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线.

角的平分线有下面的性质定理：

（1）角平分线上的点到这个角的两边的距离相等.

（2）到一个角的两边距离相等的点在这个角的平分线上.

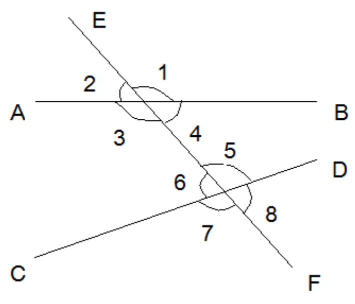
二、相交线中的角

1. 邻补角与对顶角

两条直线相交，可以得到四个角，我们把两条直线相交所构成的四个角中，有公共顶点但没有公共边的两个角叫做对顶角.我们把两条直线相交所构成的四个角中，有公共顶点且有一条公共边的两个角叫做临补角.

邻补角互补，对顶角相等.

直线 AB，CD 与 EF 相交（或者说两条直线 AB，CD 被第三条直线 EF 所截），构成八个角.其中∠1 与∠5 这两个角分别在 AB，CD 的上方，并且在 EF 的同侧，像这样位置相同的一对角叫做同位角；∠3 与∠5 这两个角都在 AB，CD 之间，并且在 EF 的异侧，像这样位置的两个角叫做内错角；∠3 与∠6 在直线 AB，CD 之间，并侧在 EF 的同侧，像这样位置的两个角叫做同旁内角.



2.垂线

两条直线相交所成的四个角中，有一个角是直角时，就说这两条直线互相垂直.其中一条直线叫做另一条直线的垂线，它们的交点叫做垂足.

直线 AB，CD 互相垂直，记作“AB⊥CD”（或“CD⊥AB”)，读作“AB 垂直于 CD”（或“CD 垂直于 AB”）.

垂线的性质：

性质 1：过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.

性质 2：直线外一点与直线上各点连接的所有线段中，垂线段最短.简称：垂线段最短.

三、平行线

1.平行线的概念

在同一个平面内，不相交的两条直线叫做平行线.平行用符号“∥”表示，如“AB∥CD”，读作“AB 平行于 CD”.

同一平面内，两条直线的位置关系只有两种：相交或平行.

【注意】（1）平行线是无限延伸的，无论怎样延伸也不相交.

（2）当遇到线段、射线平行时，指的是线段、射线所在的直线平行.

2.平行线公理及其推论

平行公理：经过直线外一点，有且只有一条直线与这条直线平行.

推论：如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行.

3.平行线的判定

平行线的判定公理：两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么两直线平行.简称：同位角相等，两直线平行.

平行线的两条判定定理：

（1）两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等，那么两直线平行.简称：内错角相等，两直线平行.

（2）两条直线被第三条直线所截，如果同旁内角互补，那么两直线平行.简称：同旁内角互补，两直线平行.

补充平行线的判定方法：

（1）平行于同一条直线的两直线平行.

（2）垂直于同一条直线的两直线平行.

（3）平行线的定义.

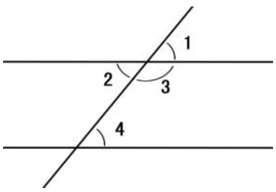
4．平行线的性质

（1）两直线平行，同位角相等.

（2）两直线平行，内错角相等.

（3）两直线平行，同旁内角互补.

如下图：$\angle 1$与$\angle 4$同位角，同位角相等；
$\angle 2$与$\angle 4$是内错角，内错角相等；
$\angle 3$与$\angle 4$同旁内角，同旁内角互补.



四、三角形的角与边

1.内角

三角形内角和为 180°.

【评注】在同一个三角形中：等角对等边；等边对等角；大角对大边；大边对大角.

2.外角

三角形外角等于不相邻的两个内角之和.

3.三边关系

任意两边之和大于第三边，即 $a+b>c$；

任意两边之差小于第三边，即 $a-b<c$

【评注】两句话是等价的，只要满足其中一个要求就可以构成三角形. 在判断三个长度能否组成三角形，我们只用做一个判断，那就是，最小的两边相加大于最大边即可.

五、三角形的分类

按边分类

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{等腰三角形}\begin{cases}\text{底边和腰不相等的等腰三角形}\\ \text{等边三角形}\end{cases}\\ \text{不等边三角形}\end{cases}$$

按角分类

$$\text{三角形}\begin{cases}\text{直角三角形}\\ \text{斜三角形}\begin{cases}\text{锐角三角形}\\ \text{钝角三角形}\end{cases}\end{cases}$$

1.直角三角形

(1)直角三角形的两个锐角互余

可表示如下：$\angle C=90^\circ \Rightarrow \angle A+\angle B=90^\circ$

(2)在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半.

可表示如下：
$$\left.\begin{array}{l}\angle A=30^\circ\\ \angle C=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow BC=\frac{1}{2}AB$$

(3)直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半

可表示如下：
$$\left.\begin{array}{l}\angle ACB=90^\circ\\ D\text{ 为 }AB\text{ 的中点}\end{array}\right\}\Rightarrow CD=\frac{1}{2}AB=BD=AD$$

(4)勾股定理

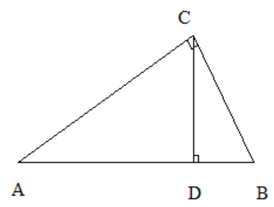
直角三角形两直角边 a，b 的平方和等于斜边 c 的平方，即 $a^2+b^2=c^2$

常用的勾股数：(3,4,5);(6,8,10);(5,12,13);(7,24,25);(8,15,17) ;(9,12,15)

(5)射影定理

在直角三角形中，斜边上的高线是两直角边在斜边上的投影的比例中项，每条直角边是它们在斜边上的投影和斜边的比例中项

$$\left.\begin{array}{l}\angle ACB=90^\circ \\ \\ CD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}CD^2=AD\bullet BD \\ AC^2=AD\bullet AB \\ BC^2=BD\bullet AB\end{cases}$$



(6)常用关系式

由三角形面积公式可得：

AB●CD=AC●BC

等腰直角三角形的三边之比：$1:1:\sqrt{2}$；

等腰直角三角形的面积：$S=\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{4}c^2$，其中 a 为直角边，c 为斜边.

内角为 30°、60°、90°的直角三角形三边之比为：$1:\sqrt{3}:2$.

2.等腰三角形

（1）等腰三角形的性质定理及推论：

定理：等腰三角形的两个底角相等（简称：等边对等角）

推论：等腰三角形顶角平分线平分底边并且垂直于底边.即等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高重合.

（2）等腰三角形的其他性质：

①等腰直角三角形的两个底角相等且等于 45°

②等腰三角形的底角只能为锐角，不能为钝角（或直角），但顶角可为钝角（或直角）.

③等腰三角形的三边关系：设腰长为 a，底边长为 b，则 $\frac{b}{2}$<a

④等腰三角形的三角关系：设顶角为顶角为∠A，底角为∠B、∠C，则∠A=180°—2∠B，∠B=∠C=$\dfrac{180°-\angle A}{2}$.

3.等边三角形

等边三角形的各个角都相等，并且每个角都等于 60°.

等边三角形高与边的比：$\sqrt{3}:2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}:1$.

等边三角形的面积：$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，其中 a 为边长.

六、三角形的特殊线段

1.三角形的中线

三角形中，连结一个顶点和它对边中点的线段.

表示法：1.AD 是△ABC 的 BC 上的中线.　　2.BD=DC=$\dfrac{1}{2}$BC

【评注】①三角形的中线是线段；②三角形三条中线全在三角形的内部；

③三角形三条中线交于三角形内部一点；这个点叫做三角形的重心.

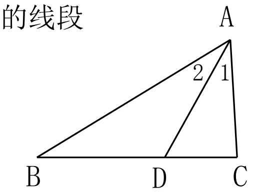
重心将中线分成 2:1 的两段.

④中线把三角形分成两个面积相等的三角形.

⑤直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

2.三角形的角平分线

三角形一个内角的平分线与它的对边相交，这个角顶点与交点之间的线段



如 AD 是△ABC 的∠BAC 的平分线，则∠1=∠2=$\dfrac{1}{2}$∠BAC.

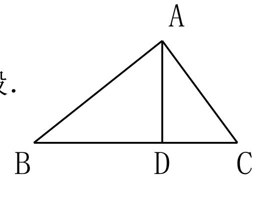
【评注】①三角形的角平分线是线段；

②三角形三条角平分线全在三角形的内部；

③三角形三条角平分线交于三角形内部一点；这个点叫做三角形的内心. 内心到三边的距离相等.

3.三角形的高

从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线作垂线，顶点和垂足之间的线段.



如 AD 是△ABC 的 BC 上的高线，则 AD⊥BC 于 D 和∠ADB=∠ADC=90°.

【评注】①三角形的高是线段；

②锐角三角形三条高全在三角形的内部，直角三角形有两条高是边，钝角三角形有两条高在形外；

③三角形三条高所在直线交于一点．这个点叫做三角形的垂心.

4.线段垂直平分线的性质．

经过某一条线段的中点，并且垂直于这条线段的直线，叫做这条线段的垂直平分线，又称“中垂线”.垂直平分线可以看成到线段两个端点距离相等的点的集合，垂直平分线是线段的一条对称轴.

【评注】①垂直平分线垂直且平分其所在线段.

②垂直平分线上任意一点，到线段两端点的距离相等.

③三角形三条边的垂直平分线相交于一点，该点叫外心，并且这一点到三个顶点的距离相等.

5.三角形的中位线

连接三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线.

（1）三角形共有三条中位线，并且它们又重新构成一个新的三角形.

（2）要会区别三角形中线与中位线.

三角形中位线定理：三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半.

（3）三角形中位线定理的作用：

位置关系：可以证明两条直线平行.

数量关系：可以证明线段的倍分关系.

【评注】任一个三角形都有三条中位线，由此有：

①三条中位线组成一个三角形，其周长为原三角形周长的一半.

②三条中位线将原三角形分割成四个全等的三角形.

③三条中位线将原三角形划分出三个面积相等的平行四边形.

④三角形一条中线和与它相交的中位线互相平分.

⑤三角形中任意两条中位线的夹角与这夹角所对的三角形的顶角相等.

七、三角形面积公式

1.利用底高求面积

$$S=\frac{1}{2}ah$$

其中 h 是 a 边上的高.

2.利用夹角求面积

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

C 是 a,b 边所夹的角.

C	30°或 150°	45°或 135°	60°或 120°	90°
sinC	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

3.利用边长求面积

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p 为三角形的半周长.

八、三角形的全等

1.全等三角形的概念

能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形.用数学语言表达就是两个三角形等价，这样的两个三角形具有相同的边长、角、面积等.

两个三角形全等时，互相重合的顶点叫做对应顶点，互相重合的边叫做对应边，互相重合的角叫做对应角.夹边就是三角形中相邻两角的公共边，夹角就是三角形中有公共端点的两边所成的角.

2.三角形全等的判定

（1）边角边定理

有两边和它们的夹角对应相等的两个三角形全等（可简写成“边角边”或“SAS”）

（2）角边角定理

有两角和它们的夹边对应相等的两个三角形全等（可简写成“角边角”或“ASA”）

（3）边边边定理

有三边对应相等的两个三角形全等（可简写成“边边边”或“SSS”）.

3.直角三角形全等的判定

对于特殊的直角三角形，判定它们全等时，还有 HL 定理（斜边、直角边定理）：有斜

边和一条直角边对应相等的两个直角三角形全等（可简写成“斜边、直角边”或“HL”）

4.全等变换

只改变图形的位置，不改变其形状大小的图形变换叫做全等变换.

全等变换包括以下三种：

（1）平移变换：把图形沿某条直线平行移动的变换叫做平移变换.

（2）对称变换：将图形沿某直线翻折 180°，这种变换叫做对称变换.

（3）旋转变换：将图形绕某点旋转一定的角度到另一个位置，这种变换叫做旋转变换.

5.全等三角形的表示和性质

全等用符号“≌”表示，读作“全等于”.如△ABC≌△DEF，读作“三角形 ABC 全等于三角形 DEF”.

【评注】记两个全等三角形时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上.

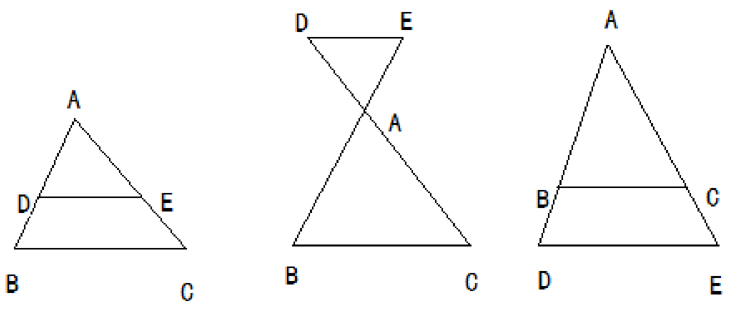
九、三角形的相似

1.相似三角形的概念

对应角相等，对应边成比例的三角形叫做相似三角形.相似用符号“∽”来表示，读作“相似于”.相似三角形对应边的比叫做相似比（或相似系数）.

2.相似三角形的基本定理

平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似.



用数学语言表述如下：因为 DE∥BC，所以△ADE∽△ABC

3.三角形相似的判定

（1）三角形相似的判定方法

①定义法：对应角相等，对应边成比例的两个三角形相似

②平行法：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，所构成的三角形与原三角形相似

③判定定理 1：如果一个三角形的两个角与另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似，可简述为两角对应相等，两三角形相似.

④判定定理 2：如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应相等，并且夹角相等，那么这两个三角形相似，可简述为两边对应成比例且夹角相等，两三角形相似.

⑤判定定理 3：如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似，可简述为三边对应成比例，两三角形相似

（2）直角三角形相似的判定方法

①以上各种判定方法均适用

②定理：如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似

③垂直法：直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似.

4.相似三角形的性质

（1）相似三角形的对应角相等，对应边成比例

（2）相似三角形对应高的比、对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比

（3）相似三角形周长的比等于相似比

（4）相似三角形面积的比等于相似比的平方.

十、三角形的四心

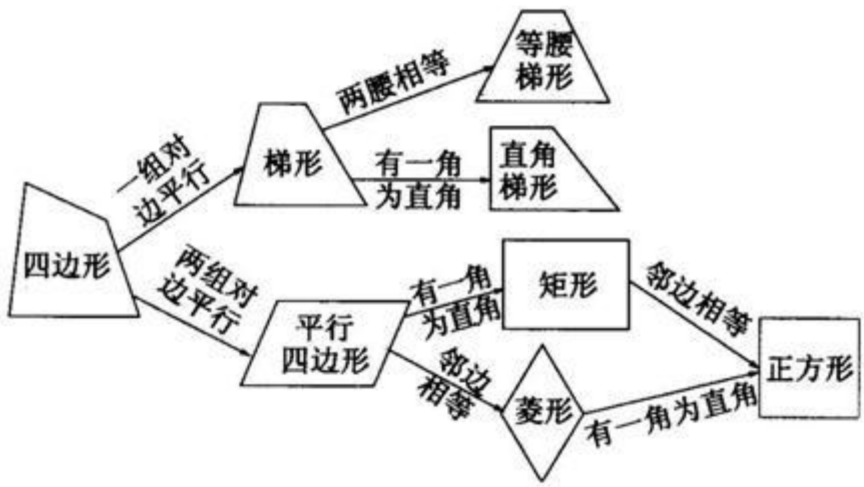
四心	定义	什么线交点	特征	公式
内心	内切圆的圆心	角平分线的交点	内心到三边距离相等	$S=\frac{r}{2}(a+b+c)$， S 为面积，r 为内切

				圆半径
外心	外接圆的圆心	三边的中垂线的交点	外心到三个顶点距离相等	直角三角形外心在斜边的中点.
重心	-	三条中线的交点	重心将三角形分成三个面积相等的三角形	重心将中线分成 2:1 两段
垂心	-	三条高的交点	-	-

十一、四边形

1.定义

在同一平面内，由不在同一直线上的四条线段首尾顺次相接的图形叫做四边形.四边形分类如图所示：



2.对角线

在四边形中，连接不相邻两个顶点的线段叫做四边形的对角线.

3.四边形的不稳定性

三角形的三边如果确定后，它的形状、大小就确定了，这是三角形的稳定性.但是四边形的四边确定后，它的形状不能确定，这就是四边形所具有的不稳定性，它在生产、生活方面有着广泛的应用.

4.四边形的内角和定理及外角和定理

四边形的内角和定理：四边形的内角和等于 360°.

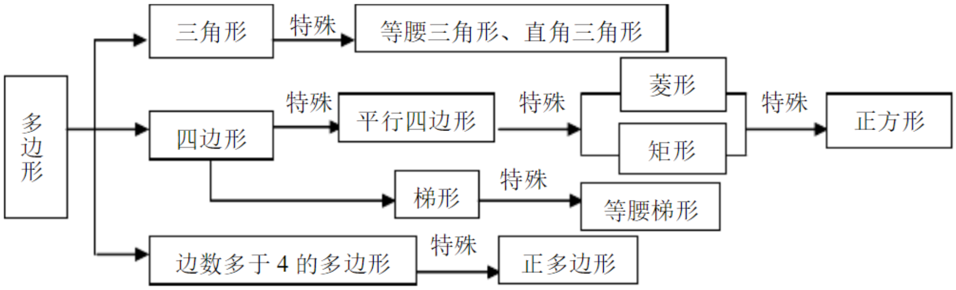
四边形的外角和定理：四边形的外角和等于 360°.

推论：多边形的内角和定理：n 边形的内角和等于 $(n-2)\bullet 180°$;

多边形的外角和定理：任意多边形的外角和等于 360°.

5.多边形的对角线条数的计算公式

设多边形的边数为 n，则多边形的对角线条数为 $\dfrac{n(n-3)}{2}$. 多边形的分类如图所示:



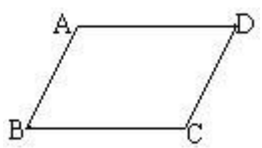
十二、平行四边形

1.平行四边形的概念

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形.

平行四边形用符号“▱ABCD”表示，如平行四边形 ABCD 记作“▱ABCD”，读作“平行四边形 ABCD”.

2.平行四边形的性质



（1）平行四边形的邻角互补，对角相等.

（2）平行四边形的对边平行且相等.

推论：夹在两条平行线间的平行线段相等.

（3）平行四边形的对角线互相平分.

（4）若一直线过平行四边形两对角线的交点，则这条直线被一组对边截下的线段以对角线的交点为中点，并且这两条直线二等分此平行四边形的面积.

3.平行四边形的判定

（1）定义：两组对边分别平行的四边形是平行四边形

（2）定理 1：两组对角分别相等的四边形是平行四边形

（3）定理 2：两组对边分别相等的四边形是平行四边形

（4）定理 3：对角线互相平分的四边形是平行四边形

（5）定理 4：一组对边平行且相等的四边形是平行四边形

4.平行四边形的面积

$S_{平行四边形}$=底边长×高=ah

十三、矩形

1.概念

有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.

2.矩形的性质

（1）具有平行四边形的一切性质

（2）矩形的四个角都是直角

（3）矩形的对角线相等

（4）矩形是轴对称图形

3.矩形的判定

（1）定义：有一个角是直角的平行四边形是矩形

（2）定理 1：有三个角是直角的四边形是矩形

（3）定理 2：对角线相等的平行四边形是矩形

4.矩形的面积

$S_{矩形}$=长×宽=ab

十四、菱形

1.概念

有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形

2.菱形的性质

（1）具有平行四边形的一切性质

（2）菱形的四条边相等

（3）菱形的对角线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角

（4）菱形是轴对称图形

3.菱形的判定

（1）定义：有一组邻边相等的平行四边形是菱形

（2）定理 1：四边都相等的四边形是菱形

（3）定理 2：对角线互相垂直的平行四边形是菱形

4.菱形的面积

$S_{菱形}$=底边长×高=两条对角线乘积的一半

十五、正方形

1.概念

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.

2.正方形的性质

（1）具有平行四边形、矩形、菱形的一切性质

（2）正方形的四个角都是直角，四条边都相等

（3）正方形的两条对角线相等，并且互相垂直平分，每一条对角线平分一组对角

（4）正方形是轴对称图形，有 4 条对称轴

（5）正方形的一条对角线把正方形分成两个全等的等腰直角三角形，两条对角线把正方形分成四个全等的小等腰直角三角形

（6）正方形的一条对角线上的一点到另一条对角线的两端点的距离相等.

3.正方形的判定

（1）判定一个四边形是正方形的主要依据是定义，途径有两种：

先证它是矩形，再证有一组邻边相等.

先证它是菱形，再证有一个角是直角.

（2）判定一个四边形为正方形的一般顺序如下：

先证明它是平行四边形；再证明它是菱形（或矩形）；最后证明它是矩形（或菱形）

4.正方形的面积

设正方形边长为 a，对角线长为 b

$$S_{\text{正方形}}=a^2=\frac{b^2}{2}$$

十六、梯形

1.梯形的相关概念

一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫做梯形.

梯形中平行的两边叫做梯形的底，通常把较短的底叫做上底，较长的底叫做下底.

梯形中不平行的两边叫做梯形的腰.

梯形的两底的距离叫做梯形的高.

两腰相等的梯形叫做等腰梯形.

一腰垂直于底的梯形叫做直角梯形.

一般地，梯形的分类如下：

$$\text{梯形}\begin{cases}\text{一般梯形}\\ \text{特殊梯形}\begin{cases}\text{直角梯形}\\ \text{等腰梯形}\end{cases}\end{cases}$$

2.梯形的判定

（1）定义：一组对边平行而另一组对边不平行的四边形是梯形.

（2）一组对边平行且不相等的四边形是梯形.

3.等腰梯形的性质

（1）等腰梯形的两腰相等，两底平行.

（3）等腰梯形的对角线相等.

（4）等腰梯形是轴对称图形，它只有一条对称轴，即两底的垂直平分线.

4.等腰梯形的判定

（1）定义：两腰相等的梯形是等腰梯形

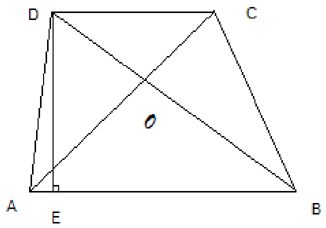
（2）定理：在同一底上的两个角相等的梯形是等腰梯形

（3）对角线相等的梯形是等腰梯形.

5.梯形的面积

（1）如图，$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(CD+AB)\cdot DE$

（2）梯形中有关图形的面积：



①$S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BAC}$；

②$S_{\Delta AOD}=S_{\Delta BOC}$；

③$S_{\Delta ADC}=S_{\Delta BCD}$

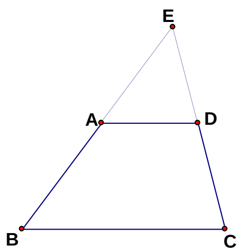
6.梯形中位线定理

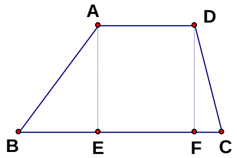
梯形中位线平行于两底，并且等于两底和的一半.

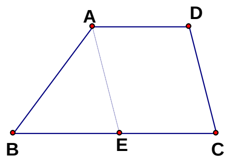
7.梯形的辅助线

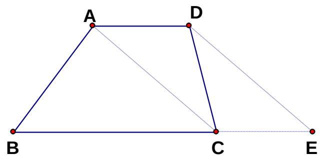
对角线是研究四边形的常用辅助线，它既可以把四边形转化为三角形，又可以充分体现四边形的所有特征. 梯形中常添加辅助线，将其转化为平行四边形或者三角形：

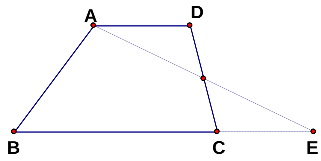
（1）过较短底的顶点作梯形的高；（2）过一个顶点作腰的平行线；（3）过一个顶点作一条对角线的平行线；（4）延长两腰相交；　（5）连结上底的一个顶点与另一腰的中点，并延长与下底的延长线相交. 梯形常用的辅助线如下图:

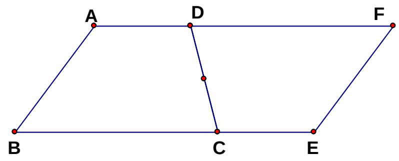












十七、角的弧度

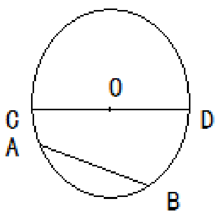
把圆弧长度和半径的比值称为对一个圆周角的弧度.

度与弧度的换算关系：$1\text{弧度}=\dfrac{180^\circ}{\pi}$ $\quad 1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度

几个常用的角

$360^\circ=2\pi \quad 180^\circ=\pi \quad 90^\circ=\dfrac{\pi}{2} \quad 60^\circ=\dfrac{\pi}{3} \quad 45^\circ=\dfrac{\pi}{4} \quad 30^\circ=\dfrac{\pi}{6}$

十八、弦、弧等与圆有关的定义



1.弦

连接圆上任意两点的线段叫做弦.（如图中的 AB）

2.直径

经过圆心的弦叫做直径.（如途中的 CD）

直径等于半径的 2 倍.

3.半圆

圆的任意一条直径的两个端点分圆成两条弧，每一条弧都叫做半圆.

4.弧、优弧、劣弧

圆上任意两点间的部分叫做圆弧，简称弧.

弧用符号"⌒"表示，以 A，B 为端点的弧记作"$\overset{\frown}{AB}$"，读作"圆弧 AB"或"弧 AB".

大于半圆的弧叫做优弧（多用三个字母表示）；小于半圆的弧叫做劣弧（多用两个字母表示）

十九、垂径定理及其推论

垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的弧.

推论 1：（1）平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧.

（2）弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧.

（3）平分弦所对的一条弧的直径垂直平分弦，并且平分弦所对的另一条弧.

推论 2：圆的两条平行弦所夹的弧相等.

二十、弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理

1.圆心角

顶点在圆心的角叫做圆心角.

2.弦心距

从圆心到弦的距离叫做弦心距.

3.弧、弦、弦心距、圆心角之间的关系定理

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦想等，所对的弦的弦心距相等.

推论：在同圆或等圆中，如果两个圆的圆心角、两条弧、两条弦或两条弦的弦心距中有一组量相等，那么它们所对应的其余各组量都分别相等.

二十一、圆周角定理及其推论

1.圆周角

顶点在圆上，并且两边都和圆相交的角叫做圆周角.

2.圆周角定理

一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

推论 1：同弧或等弧所对的圆周角相等；同圆或等圆中，相等的圆周角所对的弧也相等.

推论 2：半圆（或直径）所对的圆周角是直角；90°的圆周角所对的弦是直径.

推论 3：如果三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

二十二、过三点的圆

1.过三点的圆

不在同一直线上的三个点确定一个圆.

2.三角形的外接圆

经过三角形的三个顶点的圆叫做三角形的外接圆.

3.三角形的外心

三角形的外接圆的圆心是三角形三条边的垂直平分线的交点，它叫做这个三角形的外心.

4.圆内接四边形性质（四点共圆的判定条件）

圆内接四边形对角互补.

二十三、圆的周长及面积

圆的圆心为O，半径为r，直径为d，则

周长为$C=2\pi r=\pi d$

面积是$S=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$

二十四、扇形的弧长及面积

1.扇形弧长

$l=r\theta=\frac{\alpha°}{360}\times 2\pi r$，其中$\theta$为扇形角的弧度数，$\alpha$为扇形角的角度，$r$为扇形半径

2.扇形面积

$S=\frac{\alpha°}{360°}\times\pi r^2=\frac{1}{2}lr$，$\alpha$为扇形角的角度，$r$为扇形半径.

3.弓形面积

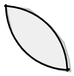
弓形一般不要求周长，主要求面积.

一般来说，弓形面积＝扇形面积-三角形面积.（除了半圆)

3.”弯角”面积

如图： 弯角的面积＝正方形-扇形

4.”谷子”面积

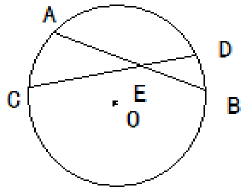
如图：“谷子”的面积＝弓形面积×2

二十五、扩展定理

（此处为大纲要求外的知识，但对数学思维模式有很大帮助）

1.相交弦定理

⊙O 中，弦 AB 与弦 CD 相交与点 E，则 AE●BE=CE●DE

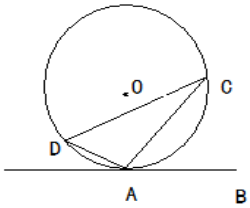


2.弦切角定理

弦切角：圆的切线与经过切点的弦所夹的角，叫做弦切角.

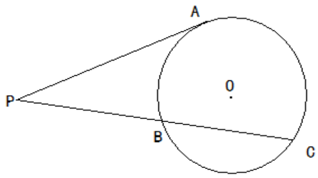
弦切角定理：弦切角等于弦与切线夹的弧所对的圆周角.

即：∠BAC=∠ADC



3.切割线定理

PA 为⊙O 切线，PBC 为⊙O 割线，则 $PA^2=PB\cdot PC$



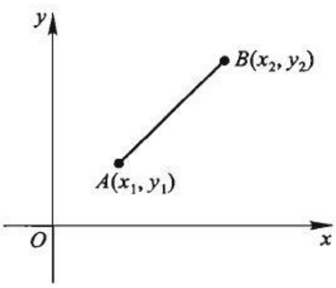
第七章 解析几何

一、平面直角坐标系

1.两点中点坐标

两点 $P_1(x_1,y_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2)$ 的中点坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

2.两点距离公式



两点 $A(x_1,y_1)$ 与 $B(x_2,y_2)$ 之间的距离：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

二、直线的倾斜角和斜率

1.倾斜角

如图 1，直线与 x 轴正方向所成的夹角，称为倾斜角，记为 α .其中要求 $\alpha\in[0,\pi)$.

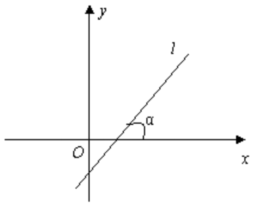


图 1

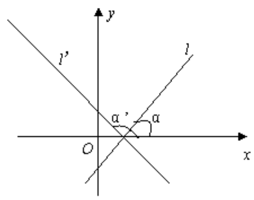


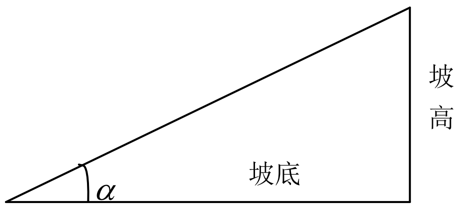
图 2

图 2 中直线 l 的倾斜角 α 为锐角，直线 l' 的倾斜角 α' 为钝角.当直线与 x 轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为 0^{o}.

倾斜角的意义：平面内每一条直线都有一个确定的倾斜角，且倾斜程度相同的直线，其倾斜角相等；倾斜程度不同的直线，其倾斜角步等.因此，直线的倾斜角表示平面内一条直线的倾斜程度.

2.斜率

由于直线的倾斜角并不是越大，直线越陡峭(越接近竖直)，故结合坡度的概念来分析直线的陡缓程度，如图，坡度 $i=\dfrac{坡高}{坡底}$



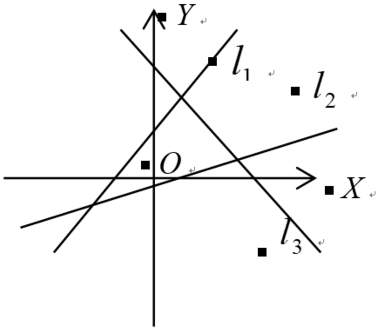
从而得到**斜率的定义**：

一条直线的倾斜角 α 的正切值叫这条直线的斜率，斜率常用小写字母 k 表示，即

$$k=\tan\alpha,\quad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$$

当 $\alpha\in[0,\ \frac{\pi}{2})$ 时，$k\in[0,\ +\infty)$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线的斜率不存在；当 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\ \pi)$ 时，$k\in(-\infty,\ 0)$. 直线的斜率反映了直线对x轴的倾斜程度.

【注意】倾斜角是90°的直线没有斜率. 并不是倾斜角越大，斜率越大. 如图中三条直线，$k_1 > k_2 > 0 > k_3$，但$\alpha_2 < \alpha_1 < 90^0 < \alpha_3$. 可以看出，斜率 k 的绝对值越大，直线越陡.



3.两点斜率公式

设直线l上有两个点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，则$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$，　$(x_1 \neq x_2)$；

直线的倾斜角和斜率

三、直线方程

1.斜截式

$y = kx + b$；

2.点斜式

$y = y_0 + k(x - x_0)$或$\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = k$；

3.截距式

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$，其中$a$、$b$分别为$x$轴、$y$轴上的截距；

4.两点式

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

5.一般式

$ax + by + c = 0$；

四、两条直线的位置关系（相交、平行、垂直）

	斜截式 l_1： $y=k_1x+b_1$； l_2： $y=k_2x+b_2$	一般式 l_1： $a_1x+b_1y+c_1=0$； l_2： $a_2x+b_2y+c_2=0$
平行	$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$，$b_1\neq b_2$	$l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$
相交	$k_1\neq k_2$	$\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$
垂直	$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$	$l_1\perp l_2\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=-1\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

五、距离公式

1.点到直线的距离

l： $ax+by+c=0$，点 (x_0,y_0) 到 l 的距离为 $d=\frac{|ax_0+bx_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2.两平行直线之间的距离

l_1： $ax+by+c_1=0$； l_2： $ax+by+c_2=0$，

那么 l_1 与 l_2 之间的距离为： $d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

三、圆

1.圆的方程

(1)标准式

圆心为 (x_0,y_0)，半径为 r 的圆可表示为： $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

(2)一般式

$x^2+y^2+ax+by+c=0$；

可将其配方变成标准式：$\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2-4c}{4}$.

【注意】一般式成立的条件 $a^2+b^2-4c>0$.

2. 直线与圆的关系

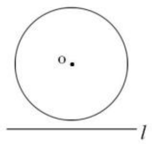
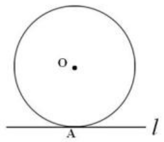
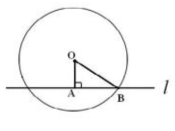
直线和圆有三种位置关系，具体如下：

（1）相交：直线和圆有两个公共点时，叫做直线和圆相交，这时直线叫做圆的割线，公共点叫做交点；

（2）相切：直线和圆有唯一公共点时，叫做直线和圆相切，这时直线叫做圆的切线，

（3）相离：直线和圆没有公共点时，叫做直线和圆相离.

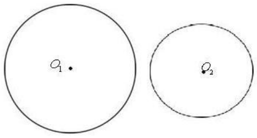
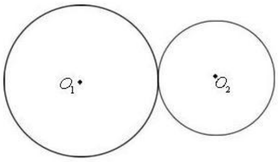
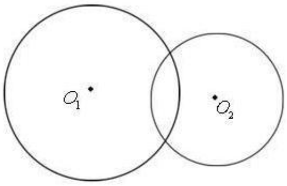
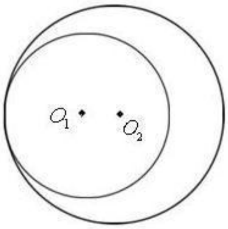
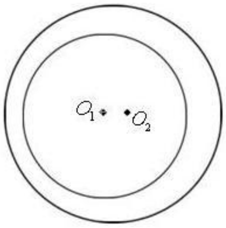
直线 l，$y=kx+b$；圆 O，$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$，d 为圆心 (x_0,y_0) 到直线 l 的距离

直线与圆 位置关系	图　　形	成立条件 （几何表示）
直线与圆 **相离**		$d>r$
直线与圆 **相切**		$d=r$
直线与圆 **相交**		$d<r$

3.圆与圆的关系

圆 O_1，$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2$；圆 O_2，$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$（不妨设 $r_1>r_2$）；

d 为圆心 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 的圆心距.

两圆位置关系	图形	成立条件（几何表示）	公共**内切线**条数	公共**外切线**条数
外离		$d>r_1+r_2$	2	2
外切		$d=r_1+r_2$	1	2
相交		$r_1-r_2<d<r_1+r_2$	0	2
内切		$d=r_1-r_2$	0	1
内含		$d<r_1-r_2$	0	0

第八章 立体几何

一、长方体

设 3 条相邻的棱边长是 a， b， c

1.体积： $V=abc$

2.全面积： $F=2\left(ab+bc+ac\right)$

3.体对角线： $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

二、正方体

设棱边长是 a

1.体积： $V=a^3$

2.全面积： $F=6a^2$

3.体对角线： $d=\sqrt{3}a$

三、柱体

1.柱体的分类

(1)圆柱

底面为圆的柱体称为圆柱.

(2)棱柱

底面为多边形的柱体称为棱柱，底面为 n 边形的就称为 n 棱柱.

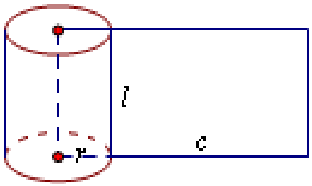
2.柱体的一般公式

无论是圆柱还是棱柱，侧面展开图均为矩形，其中一边长为底面的周长，另一边为柱体的高.

侧面积： $S=$ 底面周长 $\times$ 高 (展开矩形的面积).

体积：$V=$ 底面积 $\times$ 高.

3.对于圆柱的公式



设高为 h，底面半径为 r.

体积：$V=\pi r^2 h$.

侧面积：$S=2\pi rh$（其侧面展开图为一个长为 $2\pi r$，宽为 h 的长方形）.

全面积：$F=S_{侧}+2S_{底}=2\pi rh+2\pi r^2$.

四、球体

1.基础知识与概念

(1)球的截面：

一个平面截球，平面与球面的交线是一个圆，当平面经过球心时，这个圆叫做球的大圆，当平面不过球心时，这个圆叫做球的小圆.

(2)球心和截面圆心的连线垂直于截面.

(3)球心到截面的距离 d 与球半径 R 及截面圆半径 r 的关系：$R^2=d^2+r^2$.

(4)面距离：

球面上两点间的球面距离是指经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度.

(5)几何体的外接球：几何体的顶点都在球面上；

几何体的内切球：球与几何体的各个面都相切.

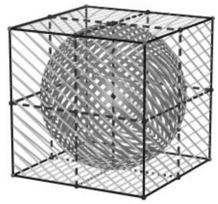
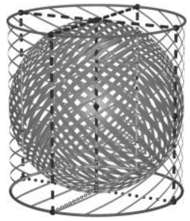
2.公式

设球半径为 r

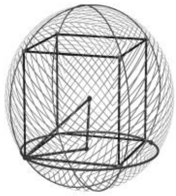
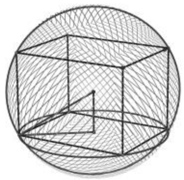
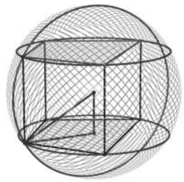
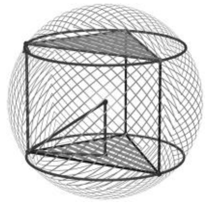
(1)体积：$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

(2)表面积：$S=4\pi r^2$

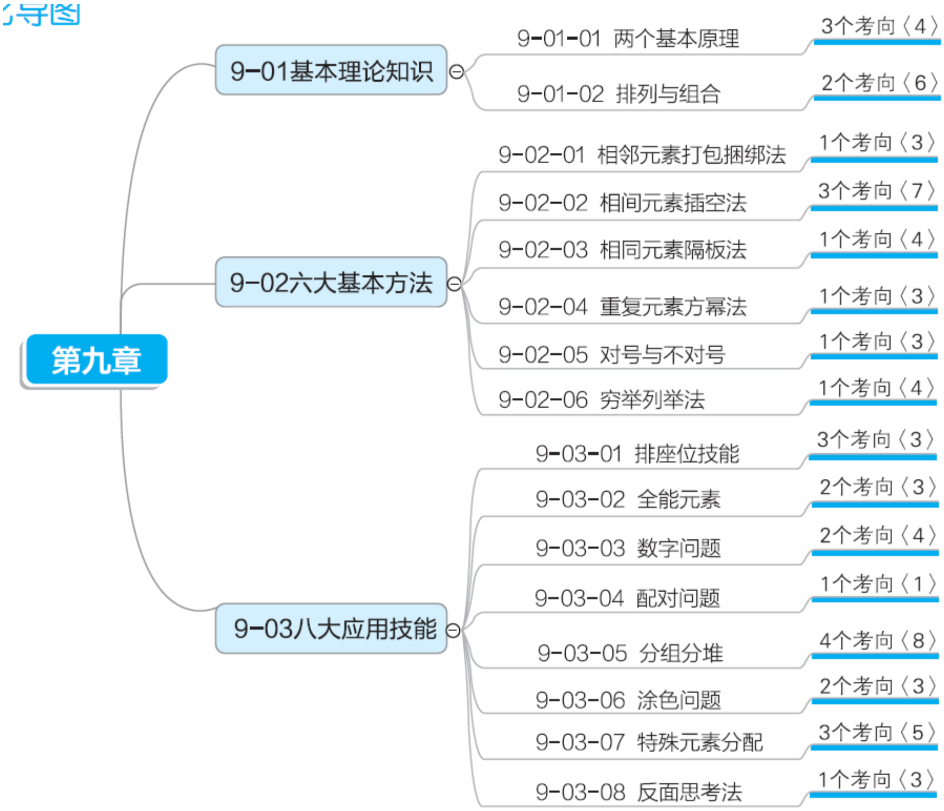
3.内切球

内切球 （半径为R）		
	边长为a的正方体： $R=\frac{a}{2}$	等边圆柱（半径 r）： $R=r$.

4. 外接球

外接球				
	正方体	长方体	圆柱	正三棱柱
	$R=\frac{\sqrt{3}a}{2}$	$R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$	$(2R)^2=(2r)^2+h^2$	$R^2=\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$

第九章 排列组合



一、分类计数原理(加法原理)

1.定义

如果完成一件事有 n 类办法,只要选择其中一类办法中的任何一种方法,就可以完成这件事;若第一类办法中有 m_1 种不同的方法,第二类办法中有 m_2 种不同的方法……第 n 类办法中有 m_n 种不同的办法,那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \Lambda + m_n$ 种不同的方法.

2.理解

运用加法原理计数，关键在于合理分类，不重不漏.要求每一类中的每一种方法都可以独立地完成此任务；两类不同办法中的具体方法，互不相同(即分类不重)；完成此任务的任何一种方法，都属于某一类(即分类不漏).合理分类也是运用加法原理解决问题的难点，不同的问题，分类的标准往往不同，需要积累一定的解题经验.

二、分步计数原理(乘法原理)

1.定义

如果完成一件事,必须依次连续地完成 n 个步骤,这件事才能完成;若完成第一个步骤有

m_1 种不同的方法,完成第二个步骤有 m_2 种不同的方法……完成第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \Lambda \cdot m_n$ 种不同的方法.

2.理解

运用乘法原理计数，关键在于合理分步.完成这件工作的 N 个步骤，各个步骤之间是相互联系的，任何一步的一种方法都不能完成此工作，必须连续完成这 N 步才能完成此工作；各步计数相互独立；只要有一步中所采取的方法不同，则对应的完成此工作的方法也不同.

三、两个原理的区别及联系

1.抓住两个基本原理的区别不要用混，不同类的方法（其中每一个方法都能把事情从头至尾做完）数之间做加法，不同步的方法（其中每一个方法都只能完成这件事的一部分）数之间做乘法.

2.在研究完成一件工作的不同方法数时，要遵循"不重不漏"的原则. 如：从若干件产品中抽出几件产品来检验，把抽出的产品中至多有 2 件次品的抽法分为两类：第一类抽出的产品中有 2 件次品，第二类抽出的产品中有一件次品，这样的分类显然漏掉了抽出的产品中无次品的情况.

又如：把能被 2、被 3 或被 6 整除的数分为三类：第一类能被 2 整除的数，第二类能被 3 整除的数，第三类能被 6 整除的数，其中第一类、第二类都和第三类有重复，这样分类是不行的.

3.在运用乘法原理时，要注意每个步骤都做完这件事也必须完成，而且前面一个步骤中的每一种方法，在下个步骤中都得有 m 种不同的方法.

四、排列

1.排列的定义

从 n 个不同元素中,任意取出 $m(m \le n)$ 个元素,按照一定顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

2.排列数

从 n 个不同元素中取出 m 个元素($m \le n$)的所有排列的种数,称为从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的排列数,记作 P_n^m或A_n^m.当$m=n$时，P_n^n或A_n^n 称为全排列.

【注意】区别排列和排列数的不同："一个排列"是指：从 n 个不同元素中，任取 m 个元素按照一定的顺序排成一列，不是数；"排列数"是指从 n 个不同元素中，任取 m （$m \le n$）个元素的所有排列的个数，是一个数**.**所以符号 P_n^m 只表示排列数，而不表示具体的排列**.**

3.排列数公式

$$P_n^m = A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

五、组合

1.组合的定义

从 n 个不同元素中,任意取出 $m(m \le n)$ 个元素并为一组,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

2.组合数

从 n 个不同元素中,取出 $m(m \le n)$ 个元素的所有组合的个数,称为从 n 个不同元素中,取出 m 个不同元素的组合数,记作 C_n^m.

(1)组合数公式: $C_n^m = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{P_n^m}{m!}$

(2)排列是先组合再排列

$$P_n^m = C_n^m \cdot P_m^m = C_n^m \cdot m!.$$

3.组合数的性质

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

(1)等式特点：等式两边下标同，上标之和等于下标；如 $C_9^6 = C_9^3 = \dfrac{9\times 8\times 7}{3!} = 84$.

(2)此性质作用：当 $m > \dfrac{n}{2}$ 时，计算 C_n^m 可变为计算 C_n^{n-m}，能够使运算简化.

(3) $C_n^x = C_n^y \Rightarrow x = y$ 或 $x + y = n$.

6 常用组合恒等式

(1) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

(2) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$

(3) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$

7.常用组合数

$C_n^0 = C_n^n = 1.\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n-1.$

$C_3^2 = C_3^1 = 3$，$C_4^2 = 6$，$C_5^2 = C_5^3 = 10$，$C_6^2 = C_6^4 = 15$，$C_6^3 = 20$

组合公式	排列公式
$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$	$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$
$C_n^0 = C_n^n = 1$	$A_n^0 = 1; A_n^n = n!$
$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$	$A_n^1 = n; A_n^{n-1} = A_n^n = n!$
$C_n^m = C_n^{n-m}$	一般$A_n^m \neq A_n^{n-m}$
$C_4^2 = 6$; $C_5^2 = 10$; $C_6^2 = 15$	0！=1！=1, 2！=2, 3！=6, 4！=24, 5！=120

六、解题准则

1.排列 $P_n^m = C_n^m \cdot P_m^m = C_n^m \cdot m!$.故排列是先组合再排列，即 P_n^m 可由组合 C_n^m 与阶乘 $m!$ 代替，为思路清晰，本书采用 C_n^m 与 $m!$ 表达.

2.选取元素或位置，用组合 C_n^m .

3.排序用阶乘 $m!$.

4.将所有的题目拆解为“选取”和“排序”的过程，然后再对应写表达式.

七、常用思维方法

1.根本大法(穷举、列举法)

很多考生看不起或者不重视列举法，认为列举法不就是数一数吗，其实则不然，列举法不仅是考试的重点，更是从本质上理解排列组合，及发现排列组合错误的根本方法.

【注意】列举的标准要选好，不要出现重复或者遗漏.

2.反面思维法

对某些排列组合问题，当从正面入手情况复杂，不易解决时，可考虑从反面入手，

将其等价转化为一个较简单的问题来处理.即采用先求总的排列数(或组合数)，再减去不符合要求的排列数(或组合数)，从而使问题获得解决的方法,其实它就是补集思想.

3.特殊元素或位置

要优先考虑特殊要求的元素或位置，再考虑其他元素或位置. 解含有约束条件的排列组合问题，应按元素的性质进行分类，按事件发生的连贯过程分步，做到分类标准明确、分步层次清楚，不重不漏. 解含有特殊元素、特殊位置的题，采用特殊优先安排的策略.

4.相邻元素或位置

采用捆绑打包分析，对于某几个元素要求相邻的排列问题，可先将相邻的元素“捆绑”起来看作一个元素与其他元素排列，然后再在相邻元素之间排列.

▲事实上，这种方法就是将相邻的某几个元素，优先考虑.

5.不相邻元素或位置

对于某几个元素不相邻的排列问题，可先将其他元素排列好，然后再将不相邻的元素在这些排好的元素之间及两端的空隙中插入.

6.方幂法

解决“允许重复排列问题”要注意区分两类元素：一类元素可以重复，另一类不能重复. 把不能重复的元素看作“人”，能重复的元素看作“房”，再利用乘法原理直接求解的方法称为“分房法”. 一般地 n 个不同的元素没有限制地安排在 m 个位置上的排列数为 m^n 种.

7.隔板法

隔板法使用要求:①n 个元素要相同，②m 个分配对象不同，

对应的公式：如果分配对象非空，即每个对象至少分一个，则有 C_{n-1}^{m-1} 种；

如果分配对象允许空，则有 C_{n+m-1}^{m-1} 种.

8.对号与不对号

元素对号入座只有 1 种排法，元素不对号入座可以记住答案：2 个不对号有 1 种方法，3 个不对号有 2 种方法，4 个不对号有 9 种方法，5 个不对号有 44 种方法. 具体推导过程可以见专题点睛内容.

八、二项式定理

本知识点只需了解即可，无需重点掌握.

1.定义

$$(a+b)^n=\overbrace{(a+b)(a+b)\cdots\cdots\cdots(a+b)}^{n个}$$

$$=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots\cdots+\underset{\substack{\downarrow\\T_{k+1}}}{C_n^ka^{n-k}b^k}+\cdots\cdots+C_n^nb^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k,\quad（其中k=0,1,2,\Lambda，n）$$

展开式共有 n+1 项，其系数称为二项式系数，由组合数性质及常用组合恒等式可知，展开式中距首末等远两项之二项式系数相等，且二项式系数之和为2^n，其奇数项和与偶数项和相等.

【评注】注意用组合的观点来考察二项式定理

$$(a+b)^n=\overbrace{(a+b)(a+b)............(a+b)}^{n个}$$

$$=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+............+\underset{T_{k+1}}{\underset{\downarrow}{C_n^ka^{n-k}b^k}}+.........+C_n^nb^n$$

二项式的展开是$\overbrace{(a+b)(a+b)............(a+b)}^{n个}$每个因式中因子只取一次，以$C_n^1a^{n-1}b$ 为例，相当于从这 n 个因式中取 n-1 个 a 与 一个 b 相乘有多少种取法.

【评注】这个思想在解底数是三项的题是很有帮助的.

【注意】虽然$(a+b)^n=(b+a)^n$，但第 k 项表达式完全不同，注意 a 与 b 不能交换

$(a+b)^n:第k+1项C_n^ka^{n-k}b^k$；而$(b+a)^n:第k+1项C_n^kb^{n-k}a^k$.

2.通项公式

二项式展开式中，共有 n+1 项（原因：k=0,1,2┅,n ），

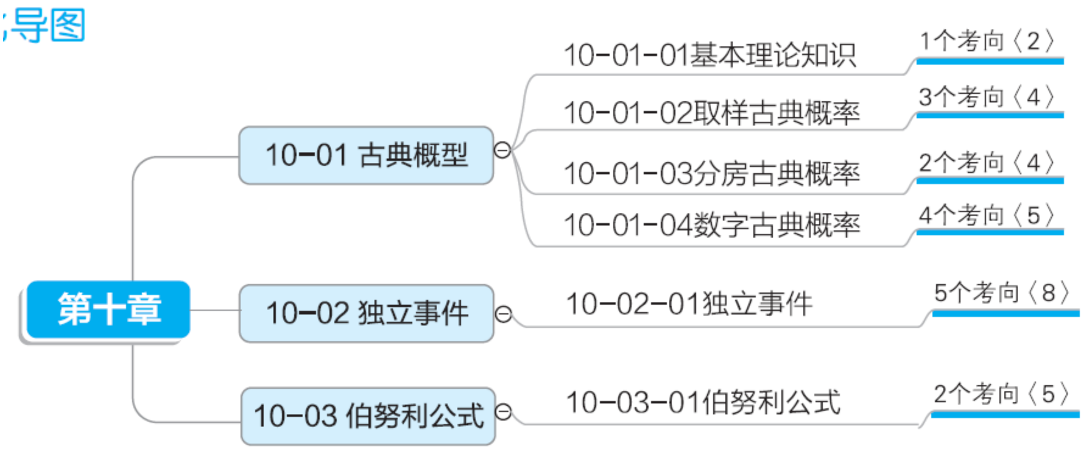
其中第$k+1$ 项为$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}\cdot b^k\qquad (k=0,1,2\text{L}\ ,n)$

3.列表归纳如下

二项式定理		公式$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\text{L}\ +C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$所表示的定理成为二项式定理.
二项式展开式的特征	通项公式	第 k＋1 项为$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$，k＝0，1，…，n
	项 数	展开总共 n＋1 项
	指 数	a 的指数：由$n\xrightarrow{逐项减1}0$；b 的指数：由$0\xrightarrow{逐项加1}n$；

		各项 a 与 b 的指数之和为 n
	展开式的最大系数	当 n 为偶数时，则中间项（第$\dfrac{n}{2}+1$项）系数$C_n^{\frac{n}{2}}$最大； 当 n 为奇数时，则中间两项（第$\dfrac{n+1}{2}$和$\dfrac{n+3}{2}$项）系数$C_n^{\frac{n+1}{2}}$最大.
展开式系数之间的关系		1．$C_n^r=C_n^{n-r}$，即与首末等距的两项系数相等； 2．$Cn^0+Cn^1+\ldots\ldots Cn^n=2^n$，即展开式各项系数之和为$2^n$； 3．$C_n^0+C_n^2+C_n^4\ldots=C_n^1+C_n^3+C_n^5\ldots=2^{n-1}$，即奇数项系数和等于偶数项系数和

第十章 概率



一、基本定义

1.随机试验

若试验满足条件：

(1)试验可在相同条件下重复进行；

(2)试验的结果具有很多可能性；

(3)试验前不能确切知道会出现何种结果，只知道所有可能出现的结果.

这样的试验叫做随机试验，简称试验，记为E.

2.随机事件

在一定条件下可能发生也可能不发生的事件；常记为 A，B，C……

【注意】三种事件都是在“一定条件下”发生的，当条件改变时，事件的性质也可以发生变化.

3.基本事件、必然事件、不可能事件

由一个样本点组成的单点集，称为基本事件，基本事件也叫样本点.

样本空间包含所有样本点，在每次试验中总是要发生的，称为必然事件.

每次试验中一定不发生的事件，称为不可能事件，记为ϕ.

二、随机事件的概率

1.概率的定义

随机事件 A 发生的可能性大小的度量值称为事件 A 的概率，记为$P(A)$.

2.概率的性质

性质 1 设有有限个两两互斥的事件 $A_1, A_2 \cdots, A_n$，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$；

性质 2 设 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

三、古典概型

1．古典概型

随机试验 E 具有以下两个特征：

(1)样本空间的元素（即基本事件）只有有限个；

⑵每个基本事件出现的可能性是相等的.

称 E 为古典概型试验.

2．计算公式

在古典概型的情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A) = \frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数k}}{\text{样本空间中基本事件总数}n}$$

3.理解

对于古典概率，需要用排列组合分别计算分子和分母的情况数，然后用比值表示发生的概率.

四、独立事件

1.独立事件概念

如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率，则称这两事件是相互独立的.

2.数学定义

若 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称两事件 A 和 B 是相互独立的.

【评注】可将其理解为：相互独立事件同时发生的概率=每个发生的概率相乘.

3.常用结论

(1)如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n)$.

(2)如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件都不发生的概率，等于每个事件不发生的概率的积，$P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \cdots \cdot \overline{A_n}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A_n})$.

(3)如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件至少有一个发生的概率，可以从其反面求解：等于每个事件发生的概率的积，$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$.

五、伯努利公式

1.独立重复试验

在相同条件下，将某试验重复进行 n 次，且每次试验中任何一事件的概率不受其它次试验结果的影响，此种试验称为 n 次独立重复试验.

2.伯努利公式

如果在一次试验中某事件发生的概率是 p,那么在 n 次独立重复试验中这个事恰好发生 k 次的概率: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}, (k=0,1,2\cdots n)$，其中 q=1-p.

k=n 时,即在 n 次独立重复试验中事件 A 全部发生,概率为 $P_n^{(n)}=C_n^n p^n (1-p)^0 = p^n$

k=0 时,即在 n 次独立重复试验中事件 A 没有发生,概率为 $P_n^{(0)}=C_n^0 p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$

【理解】n 次独立重复试验的特征：

①试验的次数不止一次，而是多次，次数 $n \geq 1$；

②每次试验的条件是一样的，是重复性的试验序列；

③每次试验的结果只有 A 与 $\overline{A}$ 两种(即事件 A 要么发生，要么不发生)，每次试验相互独立，试验的结果互不影响，即各次试验中发生的概率保持不变.

第十一章 数据描述

一、平均数

设 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，称 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的平均数.

二、众数

在一组数据中，出现次数最多的数据叫做这组数据的众数.

三、中位数

将一组数据按大小依次排列，把处在最中间位置的一个数据（或最中间两个数据的平均数）叫做这组数据的中位数.

四、极差

1.定义

极差＝最大值－最小值

2.意义

极差是用来反映一组数据变化范围的大小．我们可以用一组数据中的最大值减去最小值所得的差来反映这组数据的变化范围，用这种方法得到的差就称为极差.

极差仅只表示一组数据变化范围的大小，只对极端值较为敏感，而不能表示其它更多的意义.

五、方差

1.定义

方差公式：$S^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$

求一组数据的方差可以简记为：“先平均，再求差，然后平方，最后再平均．”

2.意义

方差是反映一组数据的整体波动大小的指标，它是指一组数据中各数据与这组数据的平均数的差的平方的平均数，它反映的是一组数据偏离平均值的情况.

六、标准差

1.定义

在计算方差的过程中，可以看出方差的数量单位与原数据的不一致，因而在实际应用时常常将求出的方差再开平方，这就是标准差.

标准差 $s=\sqrt{s^2}$

2.意义

方差和标准差都是用来描述一组数据波动情况的特征数，常用来比较两组数据的波动大小．方差较大的波动较大，方差较小的波动较小，方差的单位是原数据的单位平方，标准差的单位与原数据的单位相同．